Mathematics

JUL 24

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 177

Heft 3

Ausgegeben am 24. Juni 1937

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin W 35 und Leipzig
1937

Band 177. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Neiß, F., Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden	129
Wolff, Hermann, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden	134
Witt, Ernst, Treue Darstellung Liescher Ringe	152
Deuring, Max, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. I.	161
Ein großer wissenschaftlicher Preis	192

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden.

Von *F. Neiß* in Berlin.

In der vorliegenden Arbeit wird die Unmöglichkeit einer Dreieckskonstruktion aus den drei Winkelhalbierenden sowie einer weiteren elementargeometrischen Konstruktion bewiesen.

Allgemein gilt über derartige Aufgaben folgendes:

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die gegebenen Größen einer geometrischen Konstruktionsaufgabe, x die gesuchte Größe, so ist die Aufgabe dann und nur dann mit Zirkel und Lineal lösbar, wenn x durch rationale Operationen und durch eine endliche Kette von Quadratwurzeln aus den $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gebildet ist. Wir wollen dann x kurz konstruierbar über dem Rationalitätsbereich von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nennen.

Wie die Galoissche Theorie lehrt, genügt eine solche Größe x einer irreduziblen algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereich von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, deren Grad eine Potenz von 2 ist, und alle Wurzeln sind konstruierbar.

Bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß ein solcher Wurzelausdruck immer auf eine „einfachste" Form gebracht werden kann; das soll heißen: Ist 2^n der Grad der Gleichung, so braucht man genau n Quadratwurzeln zu seiner Darstellung.

Letzteres ist gleichbedeutend mit folgendem Satz über Sylow-Gruppen [1]): Ist $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe der Gleichung und $\mathfrak{H}$ die Untergruppe, die zu dem durch x bestimmten Körper gehört, so existiert eine Untergruppenkette:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_k = \mathfrak{H} \text{ mit } (\mathfrak{H}_i : \mathfrak{H}_{i+1}) = 2.$$

Auf die Beweise dieser Sätze, die sich auch ohne Gruppentheorie führen lassen, soll hier nicht eingegangen werden.

Wir wollen jetzt den Nachweis bringen, daß *die Aufgabe, ein Dreieck aus seinen drei Winkelhalbierenden zu konstruieren, im allgemeinen mit Zirkel und Lineal unlösbar ist.*

Es ist sehr umständlich, diese Aufgabe auf die Lösung einer einzigen algebraischen Gleichung zurückzuführen. Zur Vermeidung dieser umfangreichen Rechnung werden wir die gegebenen Größen spezialisieren und mit der Betrachtung des Falles auskommen, daß zwei der Winkelhalbierenden einander gleich sind. Es ist indessen nicht richtig, wenn man aus der Nichtkonstruierbarkeit in diesem Spezialfalle ohne weiteres schließen wollte, daß auch im allgemeinen Falle keine konstruierbare Lösung vorhanden ist. Beispielsweise hat die Gleichung:

$$(ax^2 - 1)(x^3 - 2) = 0$$

für $a = 0$ keine konstruierbare Wurzel, wohl aber für $a \neq 0$. Demnach ist noch eine

[1]) Vergl. Speiser, Gruppentheorie (1927), S. 69, Satz 80.

besondere Betrachtung durchzuführen, die in unserem Fall den Rückschluß von jenem Spezialfall auf die Allgemeinheit rechtfertigt.

Die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ eines Dreiecks werden durch folgende Formeln als Funktionen der Seiten a, b, c dargestellt:

$$\begin{aligned} w_\alpha^2\,(b+c)^2 &= bc\,(a+b+c)\,(-a+b+c),\\ w_\beta^2\,(c+a)^2 &= ca\,(a+b+c)\,(a-b+c),\\ w_\gamma^2\,(a+b)^2 &= ab\,(a+b+c)\,(a+b-c). \end{aligned} \tag{1}$$

Stellen sich bei gegebenen w_α, w_β, w_γ die Größen a, b, c von gleichem Vorzeichen heraus, so sind w_α, w_β, w_γ die drei Innenwinkelhalbierenden; bei verschiedenem Vorzeichen, also ohne Einschränkung etwa $a<0$, $b>0$, $c>0$, sind w_β und w_γ Außenwinkelhalbierende, w_α Innenwinkelhalbierende des Dreiecks mit den Seiten $|a|$, $|b|$, $|c|$. Die Gleichungen (1) fassen also die beiden Aufgaben, ein Dreieck aus seinen drei Innenwinkelhalbierenden bzw. aus zwei Außenwinkelhalbierenden und der dritten Innenwinkelhalbierenden zu berechnen, in algebraisch einheitlicher Form zusammen.

Wir beschränken die gegebenen Größen w_α, w_β, w_γ auf von Null verschiedene Werte; ferner schließen wir solche Lösungen aus, bei denen einer der in (1) vorkommenden Faktoren identisch verschwindet. Dagegen ist die Möglichkeit zu beachten, daß für gewisse von Null verschiedene Werte der gegebenen Größen eine der gesuchten Größen verschwindet oder unendlich groß wird.

Danach können wir (1) in folgender Weise umformen: Wir setzen

$$x=\frac{a}{c},\quad y=\frac{b}{c},\quad \left(\frac{w_\alpha}{w_\gamma}\right)^2=1+u,\quad \left(\frac{w_\beta}{w_\gamma}\right)^2=1+v$$

und dividieren die erste und die zweite durch die dritte der Gleichungen (1). Man erhält:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u) &= (1+u)\,(1+y)^2\,x(x+y-1)-(x+y)^2\,(y+1-x)=0,\\ F_2(x,y,v) &= (1+v)\,(1+x)^2\,y(x+y-1)-(x+y)^2\,(x+1-y)=0 \end{aligned} \tag{2}$$

oder nach Potenzen von x entwickelt:

$$\begin{aligned} F_1 &= a_0x^3+a_1x^2+\cdots, \quad a_0=1,\\ F_2 &= b_0x^3+b_1x^2+\cdots, \quad b_0=y(1+v)-1. \end{aligned}$$

Wir eliminieren x, indem wir nach dem bekannten Verfahren die Resultante als sechsreihige Determinante aufstellen. So erhalten wir die ganze rationale Funktion

$$R(y,u,v)=0.$$

Nun gilt der Satz [2]): Ist $R=0$, so haben F_1 und F_2 entweder einen gemeinsamen, von x abhängigen Faktor oder es ist $a_0=b_0=0$ und umgekehrt. Letzteres kann hier nicht eintreten, da $a_0=1$ ist. Da nur ganze rationale Operationen zur Bildung von R verwendet werden, so ist die Resultante in keiner Weise beeinträchtigt, ob u und v variabel bleiben oder durch irgendwelche festen Werte ersetzt werden. Immer gilt, daß F_1 und F_2 dann und nur dann einen gemeinsamen von x abhängigen Teiler haben, wenn $R=0$ ist.

Es sei $R_1(y,u,v)$ ein irreduzibler Teiler von R bei variablen u und v vom Grade m in y, und wir setzen:

$$R_1=A\,(u,v)\,y^m+\cdots$$

mit ganzem rationalen A.

Durch $R_1=0$ ist y und damit auch x als algebraische Funktion von u und v erklärt:

$$x=\varphi\,(u,v),\qquad y=\psi\,(u,v).$$

---

[2]) Vergl. van der Waerden, Moderne Algebra **2** (1931), S. 3.

Wir wollen grundsätzlich eine der beiden Veränderlichen, etwa v, als konstant ansehen, damit wir nur algebraische Funktionen von u allein vor uns haben. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß für $u = 0$ die Werte x und y beide endlich und von Null verschieden sind, damit aus dem Vorhandensein konstruierbarer Wurzeln im allgemeinen Fall auch auf die Existenz einer solchen Wurzel für $u = 0$ geschlossen werden kann.

Es ist aber $u = 0$, $y = 0$, $x = -1$ eine Lösung des Systems (2). Sollte die Gleichung $R_1(y, 0, v) = 0$ noch andere Lösungen besitzen, so nehme man eine solche. Dabei wird der Fall nicht ausgeschlossen, daß dieser andere Zweig bei $u = 0$ einen Pol hat. Sollten solche anderen Lösungen nicht vorhanden sein, so ist:

$$R_1(y, 0, v) = A(0, v)\, y^m.$$

In diesem Falle betrachten wir v als veränderliche Größe und u als konstant und untersuchen die Funktionen an der Stelle $v = 0$. Ganz entsprechend kann jetzt die Lösung $v = 0$, $x = 0$, $y = -1$ auftreten. Sollte $R_1(y, u, 0) = 0$ keine anderen Wurzeln besitzen, so müßte

$$R_1(y, u, 0) = A(u, 0)\,(1 + y)^m$$

sein. Hieraus folgt $A(0, 0) = 0$, und $R_1(y, 0, 0)$ verschwindet identisch. Dann müßten $F_1(x, y, 0)$ und $F_2(x, y, 0)$ einen von y unabhängigen gemeinsamen Teiler besitzen. Das ist aber nicht der Fall. Denn $F_1(x, y, 0)$ ist wohl durch $1 - x$ teilbar, aber nicht F_2. Andere Teiler sind nicht vorhanden. Wir können demnach durch Übergang zu einem anderen Zweig bzw. durch Vertauschung stets erreichen, daß nicht gleichzeitig $\varphi(0, v) = -1$ und $\psi(0, v) = 0$ ist.

Es sei jetzt $v \neq 0$ und $\neq -1$, sonst ein beliebiger fester Wert. Dann gibt es rationale Zahlen (positiv, null oder negativ) α, β, γ, δ so, daß

$$x = u^\alpha f(u),\ y = u^\beta g(u),\ x + y = u^\gamma h(u),\ x - y = u^\delta k(u)$$

ist, während $f(0)$, $g(0)$, $h(0)$, $k(0)$ endlich und von Null verschieden sind. Die Exponenten sind im allgemeinen von dem Zweig der algebraischen Funktionen und von der Wahl der Größe v abhängig. Wir werden zeigen, daß unabhängig von v stets $\alpha = \beta = 0$ genommen werden kann.

Zu diesem Zweck betrachten wir die beiden in F_1 und F_2 vorkommenden Summanden und vergleichen die Größenordnungen, von denen diese Glieder verschwinden oder unendlich groß werden.

Ist zunächst $\alpha > \beta > 0$, so ist $\gamma = \delta = \beta$, und es folgt aus $F_1 = 0$

$$\alpha = 2\beta$$

und aus $F_2 = 0$

$$\beta = 2\beta,$$

also

$$\alpha = \beta = 0.$$

Entsprechendes gilt für $\beta > \alpha > 0$.

Ist $\alpha = \beta > 0$, dann ist einerseits $\gamma \geqq \alpha$, und andererseits ergibt sich aus $F_1 = 0$

$$\alpha = 2\gamma.$$

Ist $\alpha > \beta = 0$, dann müßte infolge der ersten Gleichung $g(0) = -1$ sein, und $F_2 = 0$ würde nur für $v = 0$ möglich sein. Dieser Wert ist aber ausgeschlossen.

Dagegen führt $\beta > \alpha = 0$ zu der Lösung $x = -1$, $y = 0$, $u = 0$, die gegebenenfalls durch eine konjugierte ersetzt worden ist.

Es bleibt noch der Fall übrig, daß eine der beiden Größen negativ wird. Nehmen wir $\alpha < 0$ und $\beta > \alpha$, dann ist aus F_2 ersichtlich, daß $3\alpha + \beta = 3\alpha$ und $\beta = 0$ sein muß. Der Widerspruch folgt leicht aus F_1.

Ist endlich $\alpha = \beta < 0$, so ist für $\gamma \neq 0$ leicht zu sehen, daß das erste Glied von höherer Ordnung unendlich wird als das zweite. Nur der Fall $\gamma = 0$ und $\lim_{u \to 0}(x + y - 1) = 0$ erfordert noch eine kleine Betrachtung. Zunächst ist in diesem Fall $f(0) + g(0) = 0$. Durch Division erhalten wir:

$$\frac{1+u}{1+v}\left(\frac{1+y}{1+x}\right)^2 \frac{x}{y} = \frac{y+1-x}{x+1-y}.$$

Setzt man $u = 0$, so wird:

$$\frac{1}{1+v}\,\frac{g(0)}{f(0)} = -1, \qquad \frac{1}{1+v} = 1, \qquad v = 0$$

im Gegensatz zu der Festsetzung für v.

Wenn nun $R_1(y, u, v) = 0$ eine konstruierbare Wurzel besitzt, so haben alle Wurzeln diese Eigenschaft, und unter ihnen ist sicher eine für $u = 0$ endlich und von Null verschieden. Ebenso verhalten sich x und die übrigen hier auftretenden Faktoren. Folgende Rechnung zeigt aber, daß das System (2) für $u = 0$ auf irreduzible kubische Gleichungen führt.

Eine Umformung ergibt:

$$F_1(x, y, 0) = (x - 1)\,[y^2(x + y + 1) + x(3y + x + 1)] = 0.$$

Für $x = 1$ wird:

$$F_2(1, y, v) = (1 + v)\,4y^2 - (y + 1)^2(2 - y) = 0,$$

und diese kubische Gleichung ist, wie leicht nachzuweisen, irreduzibel. Es bleibt noch

$$y^2(x + y + 1) + x(3y + x + 1) = 0$$

zu untersuchen. Wir schreiben diese Gleichung in der Form:

$$2(x + y)^2 - (x - y^2)\,(x + y - 1) = 0$$

und erhalten unter Benutzung dieser Beziehung die Gleichung $F_2 = 0$ in folgender Vereinfachung:

$$2(1 + v)\,(1 + x)^2\,y - (x - y^2)\,(x + 1 - y) = 0.$$

Durch Einführung einer neuen Unbekannten z vermöge der Substitution

$$x = zy - 1$$

gehen die beiden Gleichungen $F_2 = 0$ und der zweite Faktor von $F_1(x, y, 0) = 0$ über in:

$$\begin{aligned} 2(1 + v)\,z^2y^2 - (x - y^2)\,(z - 1) &= 0, \\ y^2(z + 1) + x(3 + z) &= 0. \end{aligned}$$

Diese sind homogen und linear in x und y^2. Die Elimination führt zu folgender irreduziblen kubischen Gleichung:

$$(1 + v)\,z^3 + (4 + 3v)\,z^2 + z - 2 = 0.$$

Für $u = 0$ existieren also, abgesehen von solchen Zahlenwerten v, für die eine der beiden kubischen Gleichungen zerfällt, keine konstruierbaren Wurzeln. Im allgemeinen Falle also auch nicht.

Wir behandeln noch eine Aufgabe, die auf eine Gleichung vierten Grades führt:

Durch einen gegebenen Punkt P soll eine Gerade gelegt werden, die die Schenkel eines gegebenen Winkels α in C und D so schneidet, daß CD gleich einer gegebenen Strecke a wird.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ handelt es sich um die Konstruktion der Tangenten an eine Astroide.

A sei der Scheitel von α, $PA = r$, $\sphericalangle PAC = \omega$, $\sphericalangle PCA = x$.

Wie leicht zu sehen ist, besteht folgende irreduzible Gleichung vierten Grades in $\sin x$:

$$\frac{r \sin \omega}{\sin x} + \frac{r \sin (\alpha - \omega)}{\sin (\alpha + x)} = a .$$

Im allgemeinen Fall müssen entweder alle vier Wurzeln konstruierbar sein oder keine.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $a = 2r$ lautet die Gleichung:

$$\sin (\omega + x) = \sin 2x .$$

Diese ist auch vom vierten Grade, aber reduzibel und hat die Wurzeln:

$$x = \omega, \frac{\pi - \omega}{3}, \frac{3\pi - \omega}{3}, \frac{5\pi - \omega}{3} .$$

Eine ist konstruierbar, die drei anderen nicht, da sie durch Dreiteilung eines Winkels erhalten werden. Für beliebige α und r ist also keine Wurzel konstruierbar.

Mit den hier angegebenen Methoden zur Entscheidung über die Lösbarkeit einer geometrischen Konstruktionsaufgabe wird man in den meisten Fällen auskommen. Ist der Grad der zugehörigen Gleichung durch eine ungerade Zahl teilbar, so ist man fertig; ist er eine Potenz von 2, so versuche man durch Spezialisierung einen irreduziblen Faktor abzuspalten, dessen Grad durch eine ungerade Zahl teilbar ist.

Charlottenburg, April 1936.

Eingegangen 16. Mai 1936.

Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden.

Von *Hermann Wolff* in Berlin.

Während die Konstruktion eines Dreiecks mittels Zirkel und Lineal aus seinen drei Höhen oder seinen drei Schwerlinien in einfachster Weise durchführbar ist, scheitert man an der Aufgabe, ein Dreieck aus seinen drei Winkelhalbierenden zu bestimmen auch dann, wenn man höhere Mittel in Anspruch nimmt [1]). Der Grund liegt darin, daß bei der algebraischen Behandlung sich von selbst die Fälle mit einstellen, bei denen die Winkelhalbierenden die Rolle von Außenwinkelhalbierenden übernehmen, und man daher auf Gleichungen hohen Grades kommt.

Im folgenden soll das Problem so weit gefördert werden, daß eine algebraische Gleichung für den Durchmesser ∂ des Berührungskreises hergeleitet wird, deren Koeffizienten rationale symmetrische Funktionen der Winkelhalbierenden sind. Diese Gleichung erscheint algebraisch *nicht* auflösbar und ist es *nachweislich* nicht durch eine Kette quadratischer Gleichungen, womit nebenher die Nichtkonstruierbarkeit mittels Zirkel und Lineal dargetan ist. In besonderen hier zu betrachtenden Fällen wird die Gleichung kubisch. In jedem Fall werden nach Adjunktion einer Wurzel der Gleichung für ∂ die Kosinus der Dreieckswinkel Wurzeln einer kubischen Gleichung.

Die erwähnte Vielfachheit in der Bedeutung der Winkelhalbierenden soll durch Einführung des Studyschen Dreiecksbegriffes [2]) geklärt werden.

Die Resultate der Arbeit, insbesondere die Gleichungen (8), (9), (11), (11*), waren von mir mitsamt den Folgerungen 1 und 2 auf S. 140/41 schon vor 1926 gefunden. Eine Veröffentlichung unterblieb, weil ich hoffte, durch Auffindung der Gruppe der Gleichung (11*) die Frage nach der algebraischen Auflösbarkeit beantworten zu können, was mir jedoch bis jetzt nicht gelungen ist.

I. Geometrischer Teil.

In Fig. 1 sollen A, B, C die Ecken, gleichzeitig aber auch die Innenwinkel des Dreiecks im üblichen Sinne bezeichnen, A', B', C' die Außenwinkel, ϱ_i den Inkreisradius, w_A, w_B, w_C die Innenwinkelhalbierenden. Man hat dann

$$w_C = \overline{CD} = \overline{CI} + \overline{ID} = \frac{\varrho_i}{\sin\frac{C}{2}} + \frac{\varrho_i}{\sin\left(\frac{C}{2} + B\right)} = \frac{2\varrho_i \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - 1},$$

[1]) W. Heymann, Problem der Winkelhalbierenden, Ztschr. f. Math. u. Phys. **35** (1890).

[2]) Siehe H. Wolff, Über die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ebenen Dreiecke mit reellen Seiten, dieses Journal **153** (1923), S. 66.

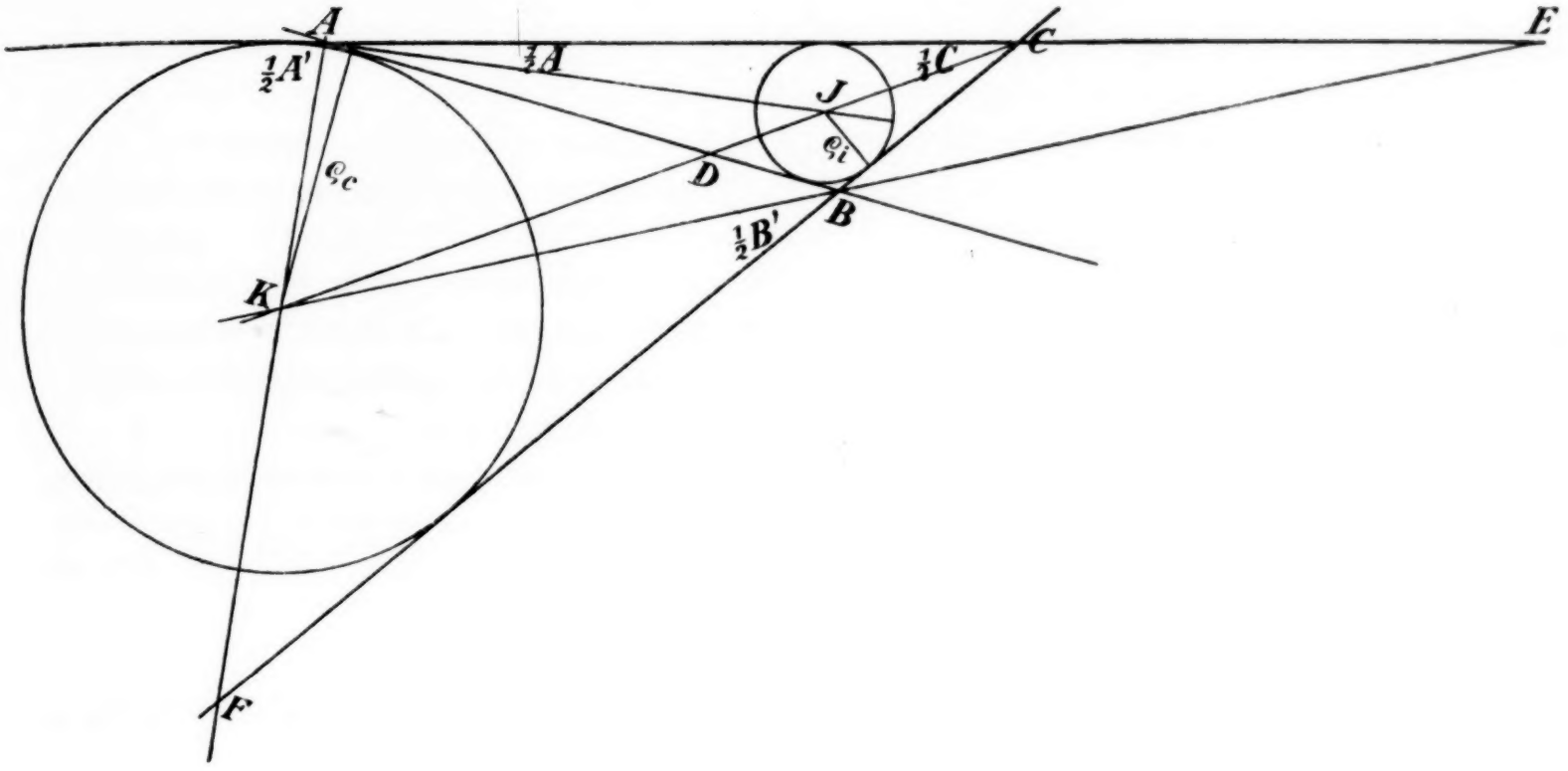

Fig. 1.

im ganzen also

$$\frac{2\varrho_i}{w_A} = \frac{\cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 1}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad \frac{2\varrho_i}{w_B} = \frac{\cos^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A}{2} - 1}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}, \quad \frac{2\varrho_i}{w_C} = \frac{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - 1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Entsprechende Betrachtungen für den Ankreisradius ϱ_C und die Außenwinkelhalbierenden $w_{A'}$, $w_{B'}$, nebst der Innenwinkelhalbierenden w_C ergeben für diese die Gleichungen

$$\frac{2\varrho_C}{w_{A'}} = \pm\frac{\cos^2\frac{B'}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 1}{\cos\frac{B'}{2}\cos\frac{C'}{2}}, \quad \frac{2\varrho_C}{w_{B'}} = \pm\frac{\cos^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A'}{2} - 1}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A'}{2}}, \quad \frac{2\varrho_C}{w_C} = -\frac{\cos^2\frac{A'}{2} + \cos^2\frac{B'}{2} - 1}{\cos\frac{A'}{2}\cos\frac{B'}{2}},$$

wo die Alternative $\pm$ in der ersten Gleichung durch $C \lessgtr B$ und in der zweiten Gleichung durch $C \lessgtr A$ entschieden wird. Das Auftreten dieser Vorzeichen stört die formale Übereinstimmung mit dem ersten Formeltripel. Es rührt das daher, daß für die Außenwinkelhalbierenden der ihre Länge bestimmende Schnittpunkt mit der Gegenseite diesseits oder jenseits des Ankreismittelpunktes liegen kann.

Nun bestimmen nach Study drei Punkte der Ebene 16 Dreiecke, welche auf 4 Grundtypen zurückgehen, die sich durch die Symbole

$$a, b, c \qquad -a, -b, -c \qquad a, b, -c \qquad -a, -b, c$$

kennzeichnen lassen und in Fig. 2 dargestellt sind. Jede Seite hat einen Richtungssinn; nur die ausgezogenen Segmente auf ihnen kennzeichnen die Seite, die punktierten Teile sollen Verlängerungen heißen. Winkel des Dreiecks heißen die mit Umlaufssinn versehenen Drehungen, die eine gerichtete Seite in die auf sie zyklisch folgende überführen. Sie sollen α, β, γ heißen. Sie sind nur mod 2π bestimmt, und ihre Summe ist $\equiv 0 \bmod. 2\pi$. Bei den beiden ersten Typen fallen sie mit dem zusammen, was man gemeinhin Außenwinkel nennt. Bei den beiden ersten Typen sind sie bezüglich gleich, und ebenso bei den beiden letzten Typen.

Durch zyklische Vertauschung verdreifacht sich die Anzahl der beiden letzten Typen, erhöht sich also die Gesamtzahl auf 8, und diese Zahl verdoppelt sich noch einmal durch Umkehrung des Drehungssinnes der Winkel.

Auf diese Begriffe gründen wir die folgenden Leitsätze und Definitionen:

1. Mit den eindeutig definierten Winkeln hat jedes Studysche Dreieck eindeutig definierte Winkelhalbierende.

2. Die auf ihnen in den Dreiecksecken errichteten Lote sollen die *Eckzentralen* des Dreiecks heißen, und ihre Längen bis zum Schnittpunkt mit den Gegenseiten mit v_α, v_β, v_γ bezeichnet werden. Bei den beiden ersten Typen sind das die obigen w_A, w_B, w_C. Die Eckzentralen sind die gegebenen Größen des Problems.

3. Die drei Eckzentralen eines Studyschen Dreiecks schneiden sich *stets* (im Unterschied zu den sonst als Innen- und Außenwinkelhalbierenden definierten Transversalen) in *einem* Punkte, um den es stets einen Seitenberührungskreis gibt, und der deshalb *Berührungszentrum* heißen soll.

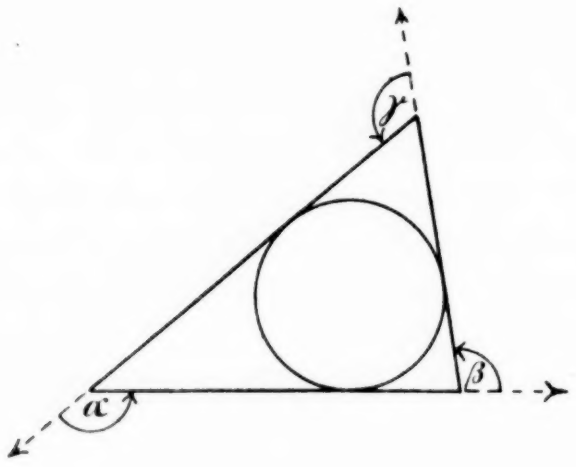

Fig. 2a. a, b, c.

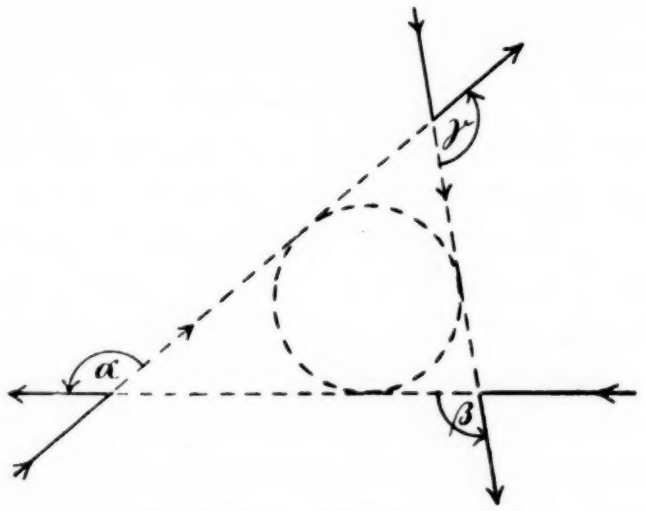

Fig. 2b. — a, — b, — c.

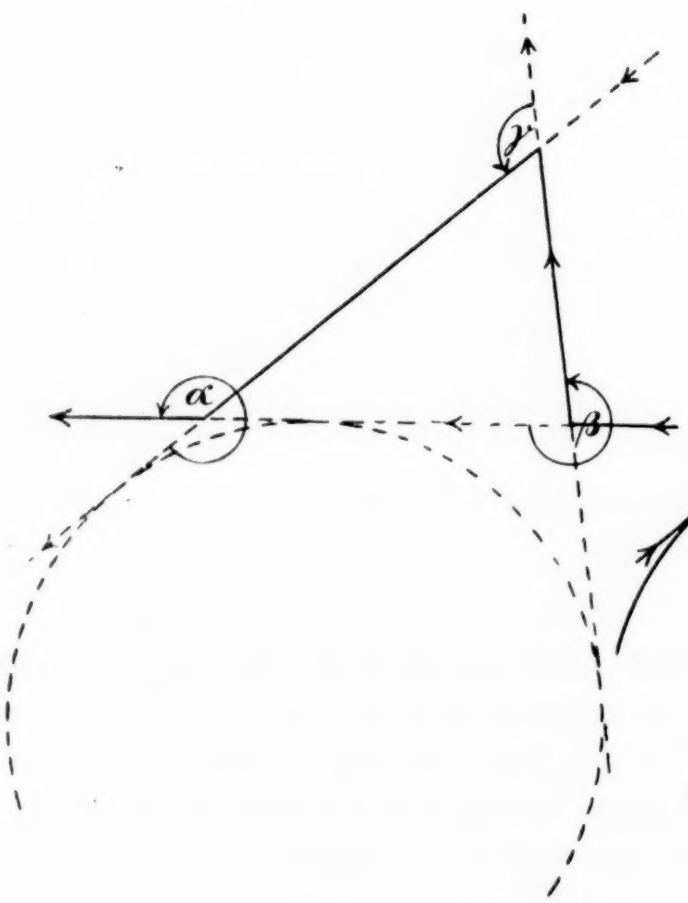

Fig. 2c. a. b, — c.

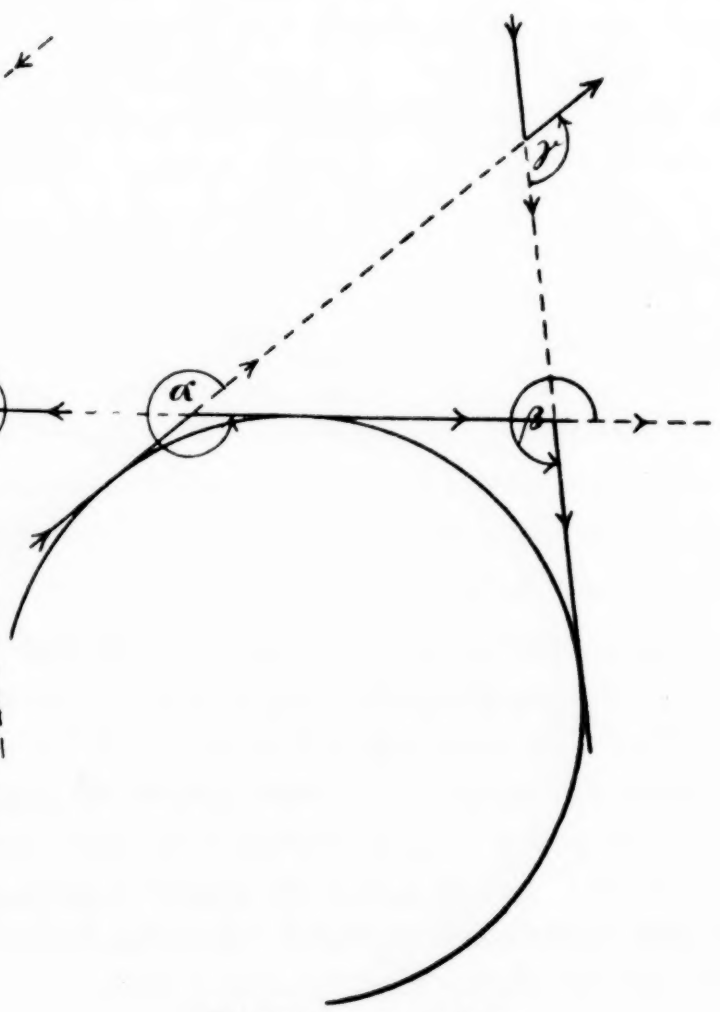

Fig. 2d. — a, — b, c.

4. Der durch 3. definierte Kreis heiße *der Berührungskreis* des Studyschen Dreiecks, da jedes solches genau *einen* Berührungskreis hat.

5. Der Berührungskreis berührt entweder alle Seiten direkt (Fig. 2a, d) oder alle in der Verlängerung (Fig. 2b, c). (Ein „teils-teils" kann nicht vorkommen.) Im ersten Fall setzen wir seinen Radius ϱ und Durchmesser $\partial = 2\varrho$ positiv, im zweiten negativ in Rechnung. Vorzeichenumkehr aller Seiten, d. h. Übergang vom ersten zum zweiten oder vom dritten zum vierten Typ oder umgekehrt, bewirkt also eine Umkehr des Vorzeichens von ∂. Das stimmt dazu, daß die Beziehung zwischen a, b, c, ∂ (wie jede Gleichung zwischen Streckengrößen in der Geometrie) homogen ist.

6. Die Verlängerungen der Dreiecksseiten werden gestrichelt, ebenso diejenigen Berührungskreise, die die Dreiecksseiten nur in der Verlängerung berühren.

Setzen wir jetzt

$$\text{(I)} \qquad x = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad y = \sin\frac{\beta}{2}, \quad z = \sin\frac{\gamma}{2},$$

so gehen die drei ersten Formeln über in

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial}{v_\alpha} = \frac{y^2 + z^2 - 1}{yz}, \quad \frac{\partial}{v_\beta} = \frac{z^2 + x^2 - 1}{zx}, \quad \frac{\partial}{v_\gamma} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{xy}.$$

Hinzu kommt die Gleichung

$$\text{(2)} \quad H(x^2, y^2, z^2) \equiv x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2z^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 0,$$

welche aussagt, daß

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \bmod 2\pi$$

ist. Aber auch das zweite, auf einen Ankreis bezogene Formeltripel kann nun unter (1) subsumiert werden. Da nämlich α, β, γ nur mod 2π bestimmt sind, so sind es x, y, z nur bis auf das Vorzeichen. Und auch über das Vorzeichen von ∂ läßt sich noch verfügen, indem man zwischen den Typen a und b bzw. c und d in Fig. 2 wählt. So läßt sich jeder möglichen Vorzeichenkombination in den Formeltripeln für die Ankreise Rechnung tragen. Denn Vorzeichenumkehr von zweien der Brüche ist formal gleichwertig mit einer der Substitutionen

$$S_x = \begin{pmatrix} x, y, z, \partial \\ -x, y, z, \partial \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} x, y, z, \partial \\ x, -y, z, \partial \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} x, y, z, \partial \\ x, y, -z, \partial \end{pmatrix},$$

Vorzeichenumkehr aller Brüche mit der Substitution

$$S = \begin{pmatrix} x, y, z, \partial \\ x, y, z, -\partial \end{pmatrix}$$

und Vorzeichenumkehr eines einzigen Bruches mit einem der Produkte S_xS, S_yS, S_zS.

Natürlich liegt in solcher Bestimmung eine gewisse Willkür, die sich jedoch nur durch eine tiefergehende Behandlung mittels algebraischer Funktionen (etwa ∂ algebraische Funktion von v_α, v_β, v_γ) beheben läßt. Eine solche, bei der dann auch zu entscheiden wäre, inwiefern sich die v_α, v_β, v_γ mit Vorzeichen ausstatten lassen, geht über die hier gestellte Aufgabe hinaus, d. i. die Auflösung der vier Gleichungen (1) und (2) nach ∂, x, y, z.

Bezüglich ihrer gilt also:

Betrachtet man im Sinne von Study die Winkel α, β, γ eines Dreiecks als nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt und läßt auch negative Werte des Berührungsdurchmessers ∂

zu, so werden durch die Gleichungen (1) *und* (2) *außer Euklidischen Dreiecken auch die Nebendreiecke von solchen erfaßt.*

II. Algebraischer Teil.

1. *Kubische Gleichung für die Kosinus der drei Dreieckswinkel.*

Die Koeffizienten dieser Gleichung werden Funktionen von $2\varrho = \partial$ sein. — Wir setzen

$$\text{(II)} \qquad \varkappa = \frac{\partial}{v_\alpha}, \quad \lambda = \frac{\partial}{v_\beta}, \quad \mu = \frac{\partial}{v_\gamma}$$

und suchen mittels der Gleichungen (1) drei symmetrische Funktionen von $\varkappa, \lambda, \mu$, nämlich

$$\text{(III)} \qquad R \equiv \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2, \quad S \equiv \varkappa\lambda\mu, \quad T \equiv \varkappa^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2 + \mu^2\varkappa^2,$$

durch drei symmetrische Funktionen von x^2, y^2, z^2 auszudrücken, nämlich durch die symmetrischen Grundfunktionen

$$\text{(IV)} \qquad s_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2, \quad s_2 \equiv x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \quad s_3 \equiv x^2y^2z^2.$$

Es ergibt sich

$$\text{(3)} \qquad R = \frac{1}{s_3}(s_1 + 3s_3 - 4s_2 + s_1s_2),$$

$$\text{(4)} \qquad S = -\frac{1}{s_3}(s_1^2 - s_1s_2 + s_2 + s_3 - 2s_1 + 1),$$

$$\text{(5)} \qquad T = \frac{1}{s_3^2}(s_2 + 9s_1s_3 - 6s_3 - 2s_1s_2 - 4s_1^2s_3 + s_1^2s_2 + s_1^3s_3 - s_1s_2s_3 - 2s_1s_2^2 - 2s_2s_3 + 2s_2^2 + s_2^3 + 3s_3^2)$$

mit $s_3 \neq 0$, solange es sich um nicht ausgeartete Dreiecke [3]) handelt. Gleichung (2) nimmt die Form an

$$\text{(6)} \qquad H \equiv s_1^2 - 4s_2 + 4s_3 = 0.$$

Die Gleichungen (3), (4), (6) sind linear in s_2, s_3. Sie ergeben durch Elimination von s_2, s_3 die Determinantengleichung [4])

$$\begin{vmatrix} s_1 - 4 & -R + 3 & s_1 \\ s_1 - 1 & -S - 1 & -s_1^2 + 2s_1 - 1 \\ -4 & 4 & s_1^2 \end{vmatrix} = 0,$$

also eine kubische Gleichung $f(\sigma) = 0$ für s_1, die sich nach leichter Rechnung als vollständig reduzibel erweist; es wird nämlich

$$f(\sigma) \equiv (\sigma - 2)^2\left(\sigma - \frac{R+1}{R-S}\right).$$

Die Lösung $s_1 = 2$ führt nach (6) und (4) auf $s_2 = 1$, $s_3 = 0$ oder $S \equiv \varkappa\lambda\mu = 0$, also $\partial = 0$, d. h. auf ausgeartete Dreiecke. Die andere Lösung gibt

$$\text{(7)} \qquad s_1 = \frac{R+1}{R-S}, \quad s_2 = \frac{(R+1)^2 - 4(S+1)}{4(R-S)(R-S-1)}, \quad s_3 = \frac{(R-2S-1)^2}{4(R-S)^2(R-S-1)},$$

wobei die Nenner auf die Möglichkeit ihres Verschwindens zu untersuchen sind. Nun sind nach ihrer Bedeutung x, y, z und damit auch s_1, s_2, s_3 endlich. Verschwinden von

---

[3]) Unter ausgearteten Dreiecken wollen wir solche verstehen, deren drei Ecken auf einer Geraden liegen.

[4]) Diese Form des Eliminationsergebnisses verdanke ich Herrn Hasse.

$R - S$ würde also nach der ersten Gleichung (7) auf $R + 1 \equiv \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$ und damit auf imaginäres ∂ führen. Ferner ist nach (3) und (4)

$$R - S - 1 \equiv \frac{1}{s_3}(-s_1 - 3s_2 + 3s_3 + s_1^2 + 1).$$

Verschwinden dieses Ausdrucks würde in Verbindung mit (6) $s_1 = 2$ nach sich ziehen, was für nicht ausgeartete Dreiecke bereits ausgeschlossen wurde. Aus der dritten Gleichung (7) folgt schließlich, daß auch $R - 2S - 1$ für nicht ausgeartete Dreiecke nicht verschwindet:

Für nicht ausgeartete reelle Dreiecke können $s_1, s_1 - 2, s_3, R - S, R - S - 1, R - 2S - 1, R + 1$ *nicht verschwinden.*

Nach (IV) und (7) sind jetzt zusammengehörige Werte von x^2, y^2, z^2 Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\begin{aligned}(8)\quad \Phi(\xi) \equiv{}& 4(R-S)^2(R-S-1)\xi^3 - 4(R-S)(R+1)(R-S-1)\xi^2 \\ &+ (R-S)[(R+1)^2 - 4(S+1)]\xi - (R-2S-1)^2 = 0,\end{aligned}$$

in der nach (II) die Koeffizienten außer von den $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ noch von der Unbekannten ∂ abhängen.

Entsprechend der Formel $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ transformieren wir (8) durch die Substitution

$$\xi = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

und erhalten, wenn zur weiteren Abkürzung

$$(V)\qquad P \equiv R - S, \quad Q \equiv S + 1$$

gesetzt wird, in

$$\begin{aligned}(9)\quad \Psi(\eta) \equiv{}& P^2(P-1)\eta^3 - P(P-1)(P-2Q)\eta^2 + P(Q^2 - 2PQ + P)\eta \\ &- (PQ^2 + 2PQ - 2Q^2 - P^2) = 0\end{aligned}$$

die kubische Gleichung, der die Kosinus zusammengehöriger Studyscher Dreieckswinkel genügen.

2. *Reduzierte Gleichung zehnten Grades für den reziproken Berührungsdurchmesser.*

Bei den bisherigen Entwicklungen wurde von der Gleichung (5) nicht Gebrauch gemacht. Diese steht daher noch zur Verfügung, um eine Relation zwischen R, S, T, nach (III) also zwischen $\varkappa, \lambda, \mu$, somit nach (II) zwischen ∂ und den gegebenen Eckzentralen herzuleiten. Die Auflösung dieser letzteren nach ∂ ist das eigentliche Problem.

Die Aufstellung der Gleichung zwischen R, S, T verlangt keine Eliminationen mehr, sondern lediglich die Eintragung der Ausdrücke (7) in die Gleichung (5). Das Ergebnis ist eine weitläufige Gleichung

$$(10)\qquad \mathsf{X}(R, S, T) = 0,$$

die in ∂ vom Grade 22 ist. Nach mühevollem Suchen fand ich, daß X teilbar ist durch

$$(R - 2S - 1)^4.$$

Unterdrückung dieses Teilers, der nach früherem nur für ausgeartete Dreiecke verschwinden kann, hinterläßt die Gleichung

$$\begin{aligned}(11)\quad \mathsf{X}_1(R, S, T) \equiv{}& T(R-S)(R-S-1) + (R-S)(R-S-1)(R+4S+2) \\ &+ 4(R-S-1)^2(3R+8S+11) + (100S+88)R - (100S^2+136S+48) \\ &- \tfrac{1}{4}(R-S)^2(R^2+42R+164S+117) = 0\end{aligned}$$

als Gleichung 10-ten Grades für ∂.

Führen wir den reziproken Wert des Berührungsradius ein:

$$\text{(VI)} \qquad t = \frac{1}{\partial} = \frac{1}{2\varrho},$$

so geht (11) durch (III), (II), (VI) über in

$$\begin{aligned}\text{(11*)} \qquad F(t) \equiv\ & t^{10} - \frac{5}{2}a_2t^8 + \frac{7}{2}a_3t^7 + \frac{33}{16}a_2^2t^6 - \frac{47}{8}a_2a_3t^5 \\ & + \left(\frac{1}{4}a_2a_4 - \frac{5}{8}a_2^3 + \frac{61}{16}a_3^2\right)t^4 + \left(\frac{5}{2}a_2^2a_3 - \frac{1}{4}a_4a_3\right)t^3 \\ & + \left(\frac{1}{16}a_2^4 - \frac{1}{4}a_2^2a_4 - \frac{25}{8}a_2a_3^2\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_2a_3a_4 - \frac{1}{8}a_2^3a_3 + \frac{5}{4}a_3^3\right)t \\ & + \left(\frac{1}{16}a_2^2a_3^2 - \frac{1}{4}a_4a_3^2\right) = 0.\end{aligned}$$

Hierin bedeuten:

$$\text{(VII)} \qquad a_2 \equiv v_\alpha^{-2} + v_\beta^{-2} + v_\gamma^{-2}, \quad a_3 \equiv v_\alpha^{-1}v_\beta^{-1}v_\gamma^{-1}, \quad a_4 \equiv v_\alpha^{-2}v_\beta^{-2} + v_\beta^{-2}v_\gamma^{-2} + v_\gamma^{-2}v_\alpha^{-2}.$$

Die Indizes der a_i geben also die Dimension in reziproken Längen an; dadurch wird jeder in $F(t)$ auftretende Koeffizient isobar, das Gewicht des Koeffizienten von t^λ wird $10 - \lambda$.

Das Fehlen der 9-ten Potenz von t erinnert daran, daß in jedem Dreieck in üblicher Bezeichnungsweise

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{-\varrho_a} + \frac{1}{-\varrho_b} + \frac{1}{-\varrho_c} = 0$$

gilt. Durch Änderung des Vorzeichens von einem oder allen dreien der v_α, v_β, v_γ ändert nur a_3 sein Vorzeichen, somit nur die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von t und damit alle Wurzeln der Gleichung (11*).

Folgerung 1. *Die Funktion $F(t)$ ist in $\Re(a_2, a_3, a_4)$ irreduzibel.*

Dies ergibt sich auf Grund des Satzes:

Hat eine reduzible Funktion die Form $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ mit variablem λ, und sind die Koeffizienten von f und g frei von λ, so haben f und g und also auch F und g einen gemeinsamen Teiler.

Beweis. Ist $F(x) = s(x)\,t(x)$ die angenommene Zerlegung, so kann nur eine der Funktionen $s(x)$, $t(x)$ den Parameter λ enthalten, und auch nur in der ersten Potenz. Sei also etwa $s(x) = f_1(x) + \lambda g_1(x)$, so ist $f(x) + \lambda g(x) = t(x) \cdot (f_1(x) + \lambda g_1(x))$ für jedes λ. Setzt man nun $\lambda = 0$, so folgt $f(x) = t(x)\,f_1(x)$; dividiert man durch λ und läßt $\lambda \to \infty$ gehen, so folgt $g(x) = t(x)\,g_1(x)$, womit der Satz bewiesen ist.

Zwecks seiner Anwendung betrachte man Gleichung (11*) in der Form (11). In ihr enthält nur T den Koeffizienten a_4, und T kommt nur an erster Stelle in (11) vor. Das erste Glied von (11) ist $T(R - S)\,(R - S - 1) \equiv a_4\partial^6\,(a_2 - \partial a_3)\,(a_2\partial^2 - a_3\partial^3 - 1)$, und darin spielt a_4 die Rolle des λ im Hilfssatze. Es ist also zu zeigen, daß X_1 durch keine der Wurzeln von

$$g(\partial) \equiv \partial^6(a_2 - \partial a_3)\,(a_2\partial^2 - a_3\partial^3 - 1) = 0$$

zum Verschwinden gebracht wird, und dazu genügt es, dies bei einer speziellen Verfügung über a_2, a_3 zu zeigen. Wir verfügen $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = 1$, wodurch $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ und die Nullstellen von $g(\partial)$

$$0,\ 3,\ \frac{-1}{2\cos\frac{\pi}{9}},\quad \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{9}},\quad \frac{1}{2\cos\frac{4\pi}{9}}$$

werden. Daß bei ihnen $\mathsf{X}_1(\partial)$ *nicht* verschwindet, werden wir bei dem später ausführlich zu behandelnden Falle $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = 1$ erkennen. Es ist also $\mathsf{X}_1(\partial)$ und damit auch $F(t)$ in $\mathfrak{R}(a_2, a_3, a_4)$ irreduzibel. Da $F(t)$ vom Grade $10 = 2 \cdot 5$ ist, so läßt sich somit (11*) nicht durch eine Kette quadratischer Gleichungen lösen:

Folgerung 2. *Mittels Zirkel und Lineal ist das Winkelhalbierendenproblem im allgemeinen nicht lösbar.*

III. Besondere Fälle.

A. *Der Fall* $v_\alpha = v_\beta$.

a_2, a_3, a_4 sind hier durch die Relation

$$4(3a_4 - a_2^2)(3a_2a_3^2 - a_4^2) - (9a_3^2 - a_2a_4)^2 = 0 \tag{12}$$

verbunden. Die Koeffizienten von $F(t)$ in Gleichung (11*) werden

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -5v_\alpha^{-2} - \frac{5}{2}v_\gamma^{-2}, \quad c_3 = \frac{7}{2}v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-1}, \quad c_4 = \frac{33}{4}\left(v_\alpha^{-4} + v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-2} + \frac{1}{4}v_\gamma^{-4}\right),$$

$$c_5 = -\frac{47}{4}\left(v_\alpha^{-4}v_\gamma^{-1} + \frac{1}{2}v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-3}\right), \qquad c_6 = -\left(\frac{9}{2}v_\alpha^{-6} + \frac{39}{16}v_\alpha^{-4}v_\gamma^{-2} + \frac{13}{4}v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-4} + \frac{5}{8}v_\gamma^{-6}\right),$$

$$c_7 = \frac{39}{4}v_\alpha^{-6}v_\gamma^{-1} + \frac{19}{2}v_\alpha^{-4}v_\gamma^{-3} + \frac{5}{2}v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-5}, \qquad c_8 = -\frac{29}{4}v_\alpha^{-6}v_\gamma^{-2} - \frac{31}{8}v_\alpha^{-4}v_\gamma^{-4} + \frac{1}{16}v_\gamma^{-8},$$

$$c_9 = \frac{9}{4}v_\alpha^{-6}v_\gamma^{-3} + \frac{1}{4}v_\alpha^{-4}v_\gamma^{-5} - \frac{1}{8}v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-7}, \qquad c_{10} = -\frac{1}{4}v_\alpha^{-6}v_\gamma^{-4} + \frac{1}{16}v_\alpha^{-4}v_\gamma^{-6}.$$

Die Funktion $F(t)$ erweist sich jetzt als reduzibel in $\mathfrak{R}(v_\alpha, v_\gamma)$; sie zerfällt in eine lineare Funktion F_1, eine kubische F_3 und das Quadrat einer kubischen G_3:

$$F(t) = F_1(t)\,F_3(t)\,G_3(t)^2, \tag{14}$$

nämlich

$$F_1(t) = t - v_\gamma^{-1},$$

$$F_3(t) = t^3 - \left(\frac{3}{4}v_\gamma^{-2} + 2v_\alpha^{-2}\right)t - \left(\frac{1}{4}v_\gamma^{-3} - v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-1}\right),$$

$$G_3(t) = t^3 + \frac{1}{2}v_\gamma^{-1}t^2 - \frac{3v_\alpha^{-2} + v_\gamma^{-2}}{2}t + \frac{1}{2}v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-1}.$$

Durch Ausmultiplizieren bestätigt man (14).

Die Lösung $t_1 = v_\gamma^{-1}$ von $F_1(t) = 0$ führt auf $\partial = v_\gamma$, $P = Q = \frac{v_\gamma^2}{v_\alpha^2} + 1$, so daß (9) zu $\eta^3 + \eta^2 - \eta - 1 = 0$ wird mit den Lösungen $\eta_1 = \eta_2 = -1$, $\eta_3 = +1$, $\alpha \equiv \beta \equiv \pi$, $\gamma \equiv 0 \bmod 2\pi$. Ein geometrischer Sinn dieser Lösung ist nicht erkennbar; jedenfalls handelt es sich um ein ausgeartetes Dreieck.

a) $F_3 = 0$: *Symmetrische Dreiecke.*

Auf den Teiler F_3 von F kommt man durch eine geometrische Überlegung. Denn der Fall $v_\alpha = v_\beta$ läßt unter anderem ein *gleichschenkliges Dreieck* erwarten, sowie ein Nebendreieck über der Basis eines solchen. In Fig. 3 sei $CA = CB$ und I der Schnittpunkt der Eckzentralen. Man fasse einmal $AC = a$, ein anderes Mal $IC = v_\gamma - \varrho$ als Grundlinie des Dreiecks AIC auf und setze die daraus folgenden Ausdrücke für sein vierfaches Inhaltsquadrat einander gleich:

$$\varrho^2 a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 (v_\gamma - \varrho)^2 = (z^2 - \varrho^2)(v_\gamma - \varrho)^2.$$

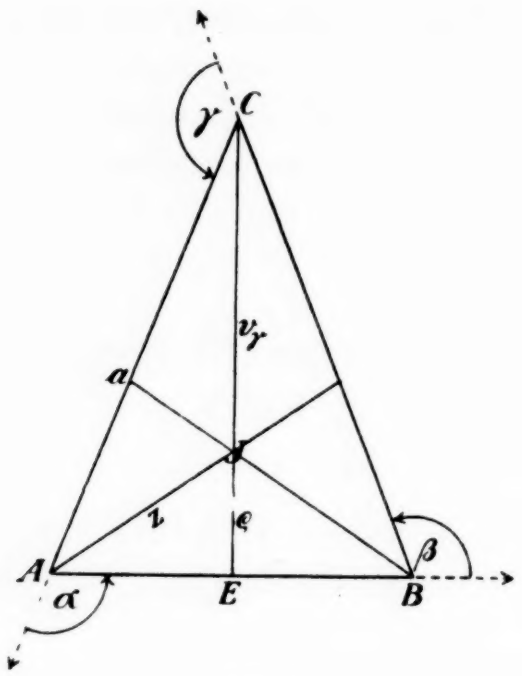

Fig. 3.

Setzt man darin nach Pythagoras

$$a^2 = z^2 + v^2 - \varrho^2,$$

so hat man

$$(z^2 - \varrho^2)\,(v_\gamma^2 - 2\,v_\gamma\,\varrho) = v_\gamma^2\,\varrho^2.$$

Die gesuchte Gleichung zwischen ϱ, v_γ, v_α entsteht aus der vorstehenden, wenn man noch $z = AI$ durch diese Größen ausdrückt. Dazu kann etwa ein Satz von Euler dienen, der besagt, daß, wenn drei Ecktransversalen s_1, s_2, s_3 eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden und u_1, u_2, u_3 ihre unteren Abschnitte sind,

$$\frac{u_1}{s_1} + \frac{u_2}{s_2} + \frac{u_3}{s_3} = 1$$

ist. Das gibt hier

$$2\,\frac{v_\alpha - z}{v_\alpha} + \frac{\varrho}{v_\gamma} = 1, \quad \text{also} \quad z = \frac{v_\alpha(v_\gamma + \varrho)}{2\,v_\gamma}.$$

Einsetzen dieses Wertes ergibt, wenn wieder wie früher $t = \frac{1}{\partial} = \frac{1}{2\varrho}$ gesetzt wird, nach einiger Umstellung

$$t^3 - \left(\frac{3}{4}\,v_\gamma^{-2} + 2\,v_\alpha^{-2}\right) t - \left(\frac{1}{4}\,v_\gamma^{-3} - v_\alpha^{-2}\,v_\gamma^{-1}\right) = 0,$$

d. i. $F_3(t) = 0$.

Unser Problem reduziert sich also auf eine Gleichung dritten Grades als Teillösung. Sie hat drei reelle Wurzeln und führt als casus irreducibilis auf die Dreiteilung eines Winkels, dessen geometrische Bedeutung freilich nicht unmittelbar evident ist. Die Lösung wird

$$t_{2,3,4} = 2\sqrt{\frac{1}{4}\,v_\gamma^{-2} + \frac{2}{3}\,v_\alpha^{-2}}\,\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi\varepsilon}{3}\right) \qquad (\varepsilon = 0, +1, -1),$$

$$tg\,\varphi = \frac{v_\alpha^{-1}\sqrt{81\,v_\gamma^{-4} + 27\,v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-2} + 96\,v_\alpha^{-4}}}{\frac{9}{4}\,v_\gamma^{-3} - 9\,v_\alpha^{-2}v_\gamma^{-1}}.$$

$t_{2,3,4}$ sind hiernach sämtlich reell, nicht aber immer die Dreieckswinkel, wie wenigstens an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Wir wählen $v_\alpha = v_\beta = 1$, $v_\gamma = 3$. Es wird $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{24}{7}$, $\varphi = 106^0\,15'\,37''$,

$t_{2,3,4} = \frac{5}{3}\cos(35^0\,25'\,12'' + \varepsilon \cdot 120^0)$ $(\varepsilon = 0, \pm 1)$, also

$$\begin{aligned} t_2 &= 1{,}3582, & \partial_2 &= 0{,}73626, \\ t_3 &= 0{,}1574, & \partial_3 &= 6{,}3523, \\ t_4 &= -1{,}5156, & \partial_4 &= -0{,}32990. \end{aligned}$$

Die zur Lösung t_2 gehörigen Dreieckswinkel entnimmt man am bequemsten der Fig. 3. In ihr ist

$$(15) \qquad \cos\alpha = -\frac{AE}{AC} = -\frac{EI}{IC} = -\frac{\varrho}{v_\gamma - \varrho} = -\frac{\partial}{2v_\gamma - \partial}.$$

Diese Formel bleibt auch gültig für das Nebendreieck über AB bei sinngemäßer Vorzeichensetzung. — Nur ∂_2 und ∂_4 liefern $|\cos\alpha| < 1$, ∂_3 gibt $|\cos\alpha| > 1$, also kein reelles Dreieck.

Nach (15) wird

$$\cos\alpha_2 = \cos\beta_2 = -0{,}13987, \qquad \alpha_2 = \beta_2 = 98^0\,2'\,27''.$$

Um die Lösung noch durch Gleichung (9) zu stützen, bemerken wir, daß diese in den vorliegenden Fällen eine Doppelwurzel besitzt, also hier durch

$$(\eta - \cos\alpha_2)^2 = \eta^2 + 0{,}27974\,\eta + 0{,}019564$$

teilbar sein muß. Nun wird nach (II), (III), (V), (VI)

$$P_2 = 1{,}0114, \qquad Q_2 = 1{,}13304,$$

also

$$P_2^{-1}\Psi(\eta) = 0{,}011530\,\eta^3 + 0{,}014304\,\eta^2 + 0{,}0032\,\eta - 0{,}0002.$$

Division durch den quadratischen Teiler liefert als Rest $-0{,}0001\,\eta$, der als unter der Fehlergrenze liegend gelten kann. Der Quotient wird $0{,}01153\,\eta + 0{,}011079$; seine Nullsetzung ergibt $\cos\gamma_2 = -\frac{1107{,}9}{1153}$, $\gamma_2 = 163^0\,55'\,15''$. Bis auf einen Fehler von $9''$ wird damit $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 360^0$. Das Dreieck ist vom Typ der Fig. 3.

Die Lösung t_4 liefert ein Nebendreieck über der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks.

b) $G_3 = 0$: *Unsymmetrische Dreiecke.*

Emmerich [5]) machte auf Dreiecke aufmerksam, die zwei gleiche Außenwinkelhalbierende besitzen und doch nicht symmetrisch sind, indem die endlichen Segmente dieser Winkelhalbierenden in verschiedenen Nebendreiecken liegen (vgl. Fig. 1). Er nannte sie *pseudo-isosc*è*les*. Nach dem Studyschen Dreiecksbegriff sind aber auch solche Dreiecke hierher zu rechnen, bei denen — nach üblicher Ausdrucksweise — eine Innenwinkelhalbierende gleich einer von einer anderen Ecke ausgehenden Außenwinkelhalbierenden ist. Auf alle derartigen Dreiecke führt die Gleichung $G_3 = 0$.

In dem schon herangezogenen Beispiel $v_\alpha = v_\beta = 1$, $v_\gamma = 3$ ergeben sich zwei Lösungen der letzteren Art. Hier hat

$$G_3(t) \equiv t^3 + \frac{1}{6}t^2 - \frac{14}{9}t + \frac{1}{6} = 0$$

---

[5]) A. Emmerich, Sur le triangle pseudo-isosc*è*le, Mathesis (2) **10** (1900), S. 129; siehe auch G. Fontené, ebendort, (3) **1** (1901), S. 124.

die Lösungen

$$\begin{aligned} t_5 &= \quad 1{,}1048, \quad \text{also} \quad \partial_5 = \quad 0{,}90513, \\ t_6 &= \quad 0{,}1092, \quad \text{„} \quad \partial_6 = \quad 9{,}15751, \\ t_7 &= -1{,}3808, \quad \text{„} \quad \partial_7 = -0{,}72422. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Winkel gehen wir dieses Mal auf die Grundgleichungen (1) zurück, die wegen $\varkappa = \lambda$ (siehe II) übergehen in

$$\varkappa yz = y^2 + z^2 - 1, \qquad \varkappa zx = z^2 + x^2 - 1, \qquad \mu xy = x^2 + y^2 - 1.$$

Subtraktion der beiden ersten gibt $\varkappa z(y - x) = (y + x)(y - x)$. Bei Zugrundelegung von $G_3 = 0$ würde nun, wie die Rechnung zeigt, $y - x = 0$ zu Winkeln führen, deren Summe *nicht* Vielfaches von 2π ist. Gleichschenkligkeit ist also auszuschließen, und so ist

$$z = \frac{x + y}{\varkappa}$$

zu nehmen. Einsetzen in die zweite Grundgleichung (1) ergibt

$$xy = \frac{(x + y)^2 - \varkappa^2}{\varkappa^2},$$

und hieraus und aus der dritten Grundgleichung (1) folgt

$$x^2 + y^2 = \frac{\varkappa^2(\mu - 1) + 2}{\mu + 2 - \varkappa^2}, \qquad x^2 y^2 = \frac{(\varkappa^2 - 1)^2}{(\mu + 2 - \varkappa^2)^2}.$$

Damit wird

$$z^2 = \frac{\mu + 1}{\mu + 2 - \varkappa^2}$$

rational in $\varkappa$, μ, und

$$x^2, y^2 = \frac{\varkappa^2(\mu - 1) + 2 \pm \varkappa\sqrt{\mu + 1}\,(\varkappa^2(\mu - 3) + 4)}{2(\mu + 2 - \varkappa^2)}.$$

Gleichung (9) spaltet also in $\mathfrak{R}(\varkappa, \mu)$ einen rationalen Linearteiler ab. Die sich nach diesen Formeln ergebenden Lösungen 5, 6, 7 werden in tabellarischer Übersicht (Fig. 4 und 5):

Nr.	$\varkappa = \lambda$	μ	x^2	y^2	z^2	α	β	γ
5	0,90513	0,30171	0,94752	0,015683	0,87808	153°30′50″	345°36′40″	220°52′22″
6	9,15751	3,05250	< 0	< 0	< 0	imag.	imag.	imag.
7	− 0,72422	− 0,24141	0,15894	0,93407	0,61469	313°0 36″	150°14′34″	256°44′23″

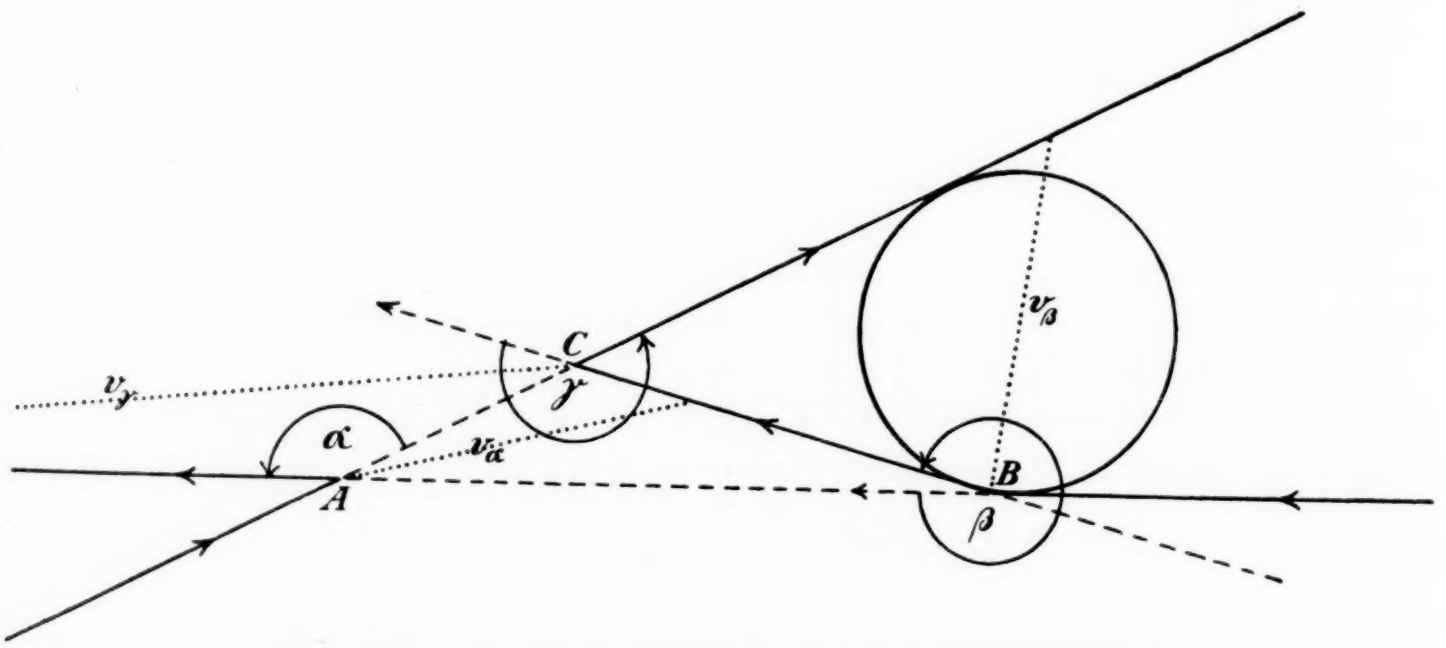

Fig. 4. $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = 1 : 1 : 3$
Lösung 5.

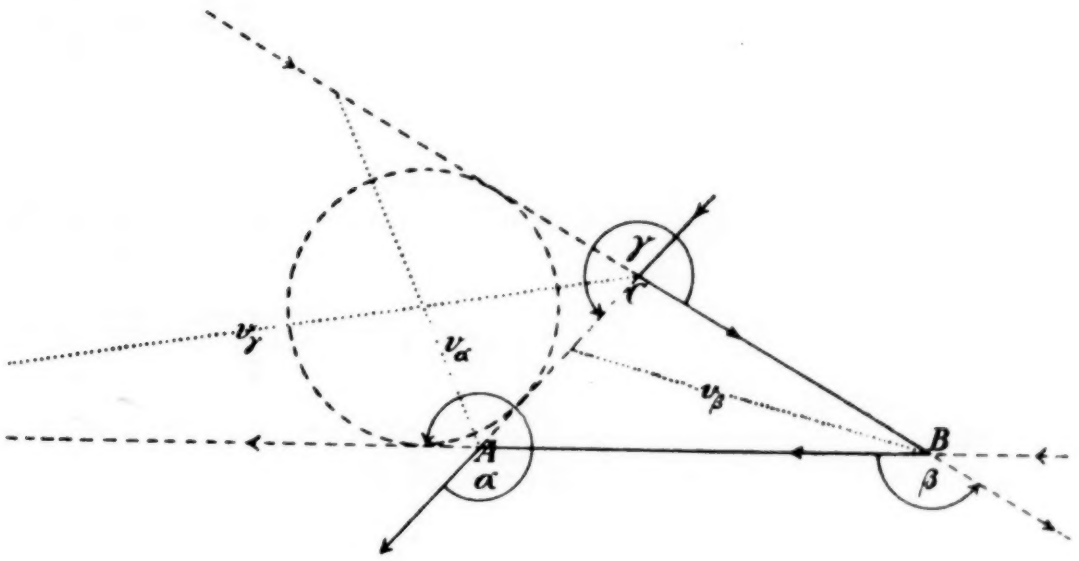

Fig. 5. $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = 1 : 1 : 3$
Lösung 7.

Die Winkelsumme bei Nr. 5 bleibt um 8″, bei Nr. 7 um 27″ hinter 4π zurück. Es ist aber zu berücksichtigen, daß eine kubische und eine quadratische Gleichung mit 5-stelligen Logarithmen zu lösen war.

Vertauschung der Ecken A und B liefert drei weitere Lösungen.

B. *Der Fall* $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma \ (= 1)$.

Hier zerfällt $F(t)$ vollständig in Linearfaktoren im Bereich $\Re(\sqrt{17})$. Im einzelnen wird:

$$F_1(t) = t - 1 \text{ mit der Nullstelle } t_1 = 1,$$

$$F_3(t) = t^3 - \frac{11}{4}t + \frac{3}{4} \text{ mit den Nullstellen}$$

$$t_2 = \frac{3}{2}, \quad t_3 = \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17}), \quad t_4 = \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{17}),$$

$$G_3(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{1}{2} \text{ mit den Nullstellen}$$

$$t_5 = 1, \quad t_6 = \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17}), \quad t_7 = \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{17}).$$

Da $G_3(t)$ quadratisch in $F(t)$ auftritt, so zählen wir weiter:

$$t_8 = t_5, \quad t_9 = t_6, \quad t_{10} = t_7.$$

Es spaltet also $F_3(t)$ einen rationalen Linearteiler ab, der einzig vorkommt, und $G_3(t)$ einen solchen, der mit $F_1(t)$ übereinstimmt, so daß

$$t_1 = t_5 = t_8$$

wird. Die übrig bleibenden Teiler von $F_3(t)$ und $G_3(t)$ sind identisch, so daß noch zwei weitere dreifache Wurzeln folgen:

$$t_3 = t_6 = t_9 \quad \text{und} \quad t_4 = t_7 = t_{10}.$$

Der geometrische Sinn der Lösung $t_1 = t_5 = t_8 = 1$ bleibt wie oben fraglich. $t_2 = \frac{3}{2}$ führt auf $\partial_2 = \frac{2}{3}$, $\varrho_2 = \frac{1}{3}$. Die Gleichung für η wird

$$\eta^3 + \frac{2}{3}\eta^2 + \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{8} = 0$$

mit der dreifachen Wurzel $\eta = -\frac{1}{2}$. Es wird also $\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{2}\pi$: *Gleichseitiges Dreieck*, das also nur *ein*fach herauskommt.

$t_3 = t_6 = t_9$ gibt für η die Gleichung

$$\eta^3 - \frac{1}{4}(27 + 7\sqrt{17})\,\eta^2 + \frac{1}{8}(191 + 47\sqrt{17})\,\eta - \frac{1}{16}(391 + 95\sqrt{17}) = 0$$

mit den Wurzeln $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{17})$, $\eta_3 = \frac{1}{4}(17 + 5\sqrt{17})$, die > 1 sind, also zu imaginären Winkeln führen.

$t_4 = t_7 = t_{10}$, $\partial_4 = \partial_7 = \partial_{10} = -\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3)$ gibt

$$\eta^3 + \frac{1}{4}(7\sqrt{17} - 27)\,\eta^2 - \frac{1}{8}(47\sqrt{17} - 191)\,\eta + \frac{1}{16}(95\sqrt{17} - 391) = 0$$

mit den Wurzeln $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{17})$ $\eta_3 = -\frac{1}{4}(5\sqrt{17} - 17)$.

Daraus folgen die Winkel $\alpha = \beta = 282^0\,39'\,47''$, $\gamma = 154^0\,40'\,25'' + 2\pi$. Bis auf einen Fehler von $1''$ ist die Winkelsumme $= 6\pi$. Die Hinzufügung von 2π zu dem Werte $154^0\,40'\,25''$ für γ ist eine Korrektur, die — bei negativem ∂ — die Vorzeichenstimmigkeit der Grundgleichungen (1) sichern soll. Dasselbe ist auch durch gleichzeitige Vermehrung von α und β um je 2π zu erreichen.

Dieser Fall eines Dreiecks, das — in üblicher Ausdrucksweise — zwei einer Innenwinkelhalbierenden gleiche Außenwinkelhalbierende hat, und das man *pseudogleichseitig* nennen könnte, ist eine schöne Bestätigung der Studyschen Auffassung vom Dreieck (Fig. 6).

C. *Der Fall* $v_\gamma = \infty$.

Er führt auf die Nebendreiecke über Schenkeln gleichschenkliger Dreiecke, denn die Außenwinkelhalbierende durch die Spitze eines solchen läuft der Grundlinie parallel. — Hier wird

$$a_2 = v_\alpha^{-2} + v_\beta^{-2}, \quad a_4 = v_\alpha^{-2} v_\beta^{-2}, \quad a_3 = 0,$$

$$F(t) \equiv t^{10} - \frac{5}{2}\,a_2 t^8 + \frac{33}{16}\,a_2^2 t^6 + \left(\frac{1}{4}\,a_2 a_4 - \frac{5}{8}\,a_2^3\right) t^4 + \left(\frac{1}{16}\,a_2^4 - \frac{1}{4}\,a_2^2 a_4\right) t^2.$$

Von den Lösungen $t^2 = 0$, $t^2 = a_2$ der Gleichung $F(t) = 0$ sehen wir ab. Sie führen beide zu ausgearteten bzw. unbestimmten Dreiecken. Nach ihrer Ausscheidung bleibt für

$$u = t^2$$

die kubische Gleichung

$$16u^3 - 24a_2u^2 + 9a_2^2u + 4a_2a_4 - a_2^3 = 0$$

mit den drei reellen Lösungen

$$u_{1,2,3} = a_2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{6} + \varepsilon\,\frac{\pi}{3}\right) \qquad (\varepsilon = 1, 2, 3),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\,v_\alpha v_\beta (v_\beta^2 - v_\alpha^2)}{v_\alpha^4 + v_\beta^4 - 6\,v_\alpha^2 v_\beta^2}.$$

Eine, wie weiter unten gezeigt wird, geometrisch deutbare Form erhält die Lösung, wenn wir setzen

$$\frac{v_\beta}{v_\alpha} = -\operatorname{tg}\psi, \quad \frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \pi.$$

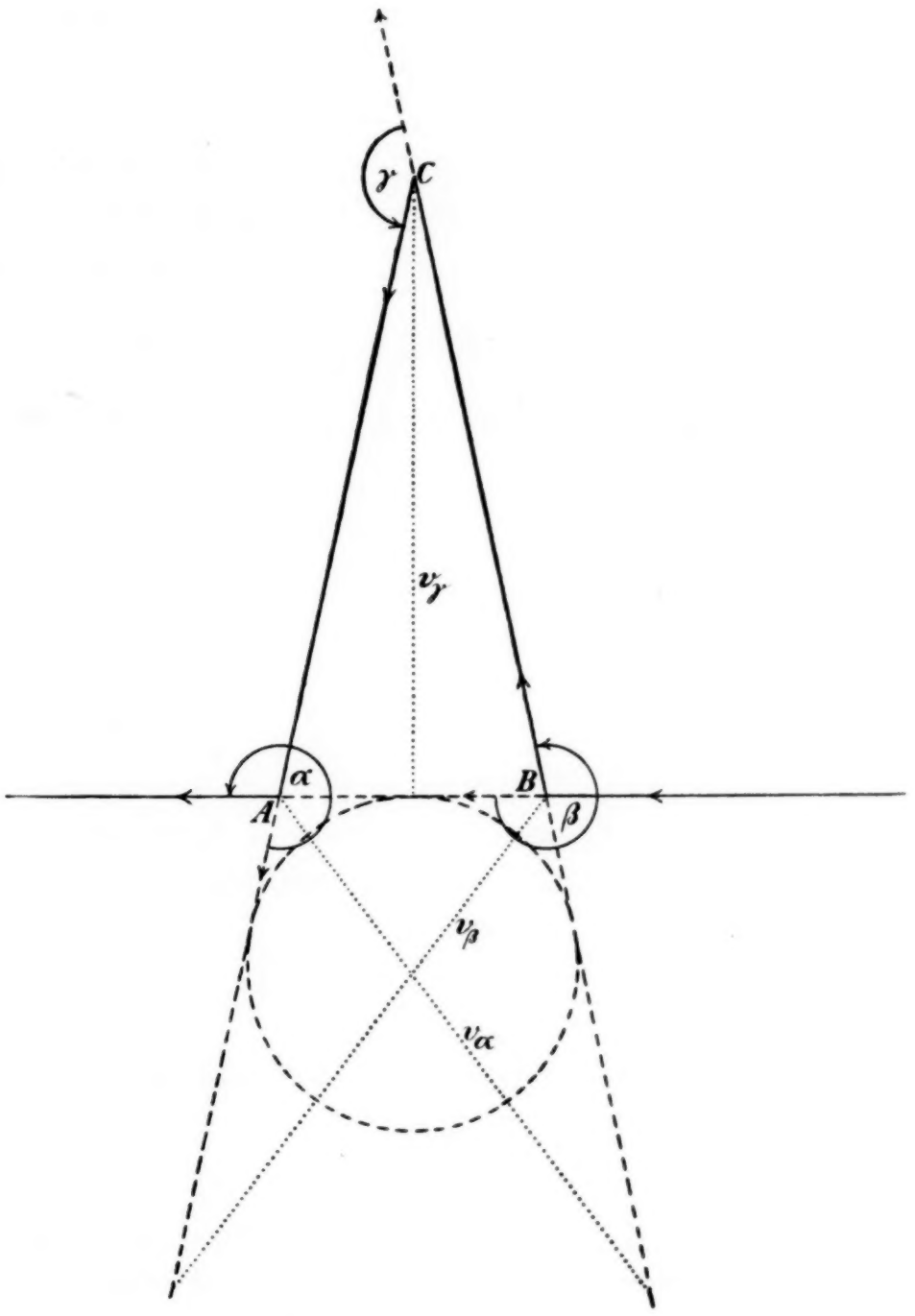

Fig. 6. $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = 1 : 1 : 1$

Dadurch geht tg φ über in

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \operatorname{tg} \psi (1 - \operatorname{tg}^2 \psi)}{1 + \operatorname{tg}^4 \psi - 6 \operatorname{tg}^2 \psi} \equiv \operatorname{tg} 4 \psi ,$$

also

$$\varphi = 4 \psi - n\pi .$$

Hier ist n ganzzahlig so zu wählen, daß $\psi = \frac{n\pi + \varphi}{4}$ in den zweiten Quadranten fällt.

Da nun $\frac{\varphi}{4}$ im ersten Quadranten liegt, so ist $n = 2$ zu nehmen. Es wird also

$$\begin{cases} u = a_2 \cos^2 \left(\frac{2}{3} \psi + m \frac{\pi}{3} \right) & (m = 0, 1, \ldots, 5) \\ \operatorname{tg} \psi = - \frac{v_\beta}{v_\alpha}, \quad \frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \pi , & \end{cases}$$

und daher

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{t} = \partial = \frac{\pm h}{\cos \left(\frac{2}{3} \psi + m \frac{\pi}{3} \right)} \qquad (m = 0, \pm 1).$$

Hier bedeutet

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_2}} = \frac{v_\alpha v_\beta}{\sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2}}$$

die Hypotenusenhöhe des aus den Katheten v_α, v_β gebildeten rechtwinkligen Dreiecks und damit zugleich die Höhe eines Schenkels des Lösungsdreiecks.

Zur Ermittlung der Dreieckswinkel ist nach (II), (III), (V) zu bilden:

$$S = 0, \quad P = R = \partial^2 a_2 = \frac{\partial^2}{h^2}, \quad Q = 1.$$

Damit wird Gleichung (9), wenn man noch durch $P - 1$ dividiert, was für nicht ausgeartete Dreiecke statthaft ist,

$$P^2\eta^3 - P(P-2)\,\eta^2 - P\eta + P - 2 \equiv (P\eta^2 - 1)\,(P\eta - P + 2) = 0$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{P}} = \pm\frac{h}{\partial} = \pm\cos\left(\frac{2}{3}\psi + m\frac{\pi}{3}\right) \\ \eta_3 &= 1 - \frac{2}{P} = 1 - \cos^2\left(\frac{2}{3}\psi + m\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{4}{3}\psi + \frac{2m\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (m = 0, \pm 1).$$

Von den Kosinus kann man noch auf verschiedene Arten auf die Dreieckswinkel selbst schließen. Jedoch ist die Anzahl einander unähnlicher Gesamtbilder nur drei, etwa entsprechend den Lösungen

$$(16) \qquad \alpha = \frac{2}{3}\psi + \frac{4m\pi}{3} + \pi, \quad \beta = \frac{2}{3}\psi + \frac{4m\pi}{3}, \quad \gamma = -\frac{4}{3}\psi - \frac{2m\pi}{3} + \pi.$$

Die Summe dieser mod 2π bestimmten Winkel ist $\equiv 0 \bmod 2\pi$. In den Fig. 7, 8, 9 ist $v_\alpha = \sqrt{3}$, $v_\beta = 1$, $\partial > 0$ gewählt. Es wird dann

$$\psi = 150^0, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \partial = \frac{\sqrt{3}}{2\cos(100^0 + m \cdot 60^0)} \quad (m = 0, \pm 1),$$

Lösg Nr.	m	α	β	γ	∂
1	0	280^0	100^0	340^0	$\frac{\sqrt{3}}{2\sin 10^0} = 4{,}9872$
2	1	160^0	340^0	220^0	$\frac{\sqrt{3}}{2\sin 70^0} = 0{,}9216$
3	-1	320^0	140^0	260^0	$\frac{\sqrt{3}}{2\sin 50^0} = 1{,}1305$

Eine einfache geometrische Überlegung lehrt nun, daß im Falle $v_\gamma = \infty$ das Problem in der Tat auf die Drittelung des Winkels ψ hinausläuft. Wir ziehen etwa in Fig. 7 ($m = 0$) außer den gegebenen v_α von A und v_β von B aus noch das Lot $DB \perp BE$. Aus Symmetriegründen wird dann auch $BD = v_\alpha$ und das rechtwinklige Dreieck DBE aus den Katheten $BE = v_\beta$, $BD = v_\alpha$ konstruierbar, und es erscheint der Winkel ψ als Außenwinkel des Dreiecks EBD bei D, aber auch des Dreiecks ABD, und da $\sphericalangle DAB = 2\sphericalangle ABD$ ist, so ist $\sphericalangle ABD = \frac{1}{3}\psi$, d. h. *die Richtung von BA durch Drittelung von ψ bestimmt.* Die Lösungen (16) für α, β, γ folgen jetzt aus der Figur in einfachster Weise.

Um auch die Lösung für ∂ zu bestätigen, entnehmen wir der Fig. 7 $\sphericalangle AEB = \psi - \frac{\pi}{2}$,

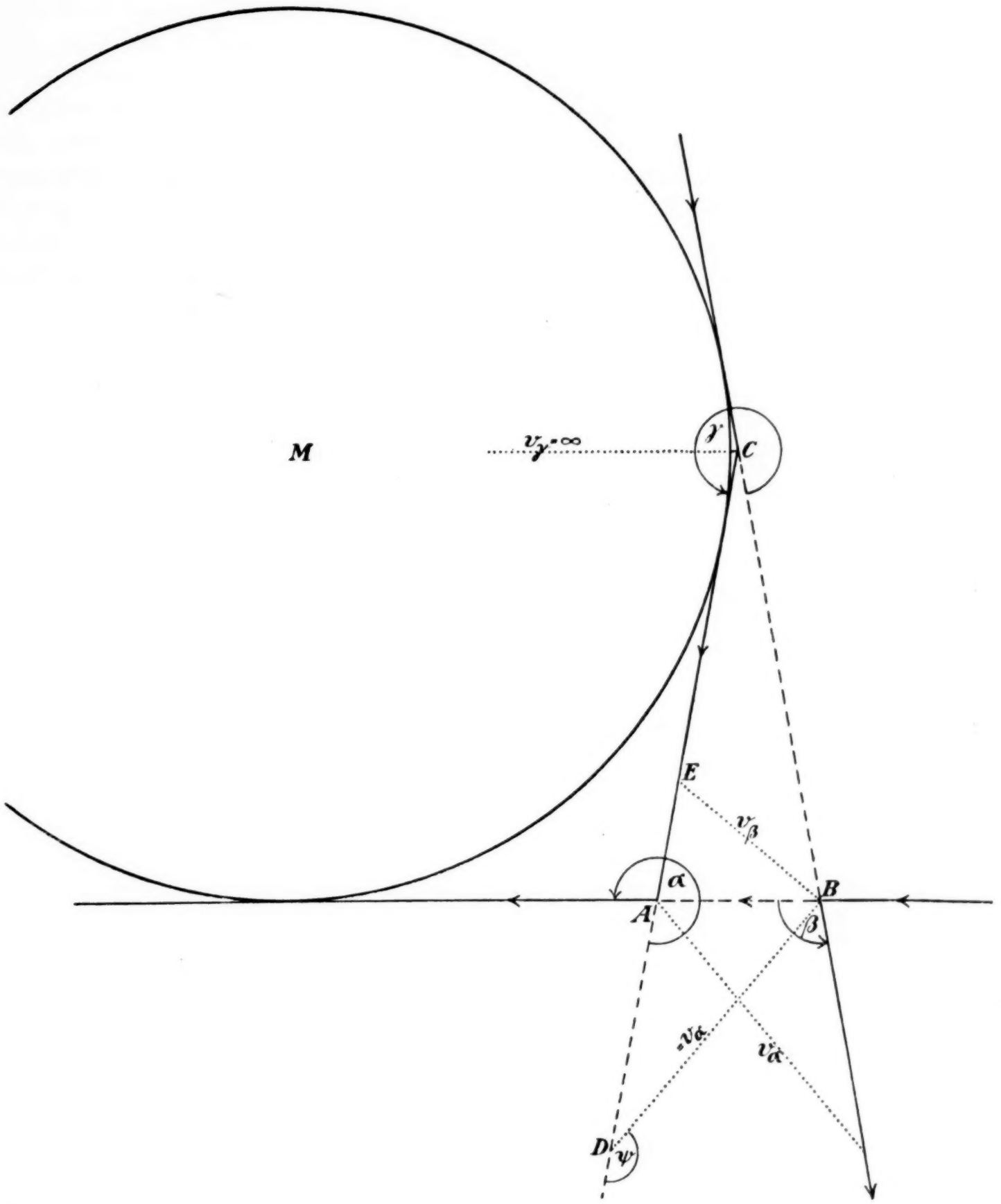

Fig. 7. $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = \sqrt{3} : 1 : \infty$
Lösung $m = 0$

also $h = v_\beta \cos \psi$ und $CA = CB = -\dfrac{h}{\sin \frac{4}{3}\psi}$. Ist ferner M das Berührungszentrum, so wird der doppelte Inhalt des Dreiecks MCA

$$\frac{|\partial|}{2} \cdot \overline{CA} = \overline{CA}^2 \frac{\sin \frac{\psi}{3} \sin\left(\pi - \frac{2}{3}\psi\right)}{\sin\left(\pi - \frac{1}{3}\psi\right)} = \overline{CA}^2 \sin \frac{2}{3}\psi ,$$

also

$$|\partial| = 2\,\overline{CA}\,\sin\frac{2}{3}\psi = \frac{2h\,\sin\frac{2}{3}\psi}{\left|\sin\frac{4}{3}\psi\right|} = \frac{h}{\left|\cos\frac{2}{3}\psi\right|}.$$

In entsprechender Weise bestätigt man die Lösungen $m = \pm 1$ an den Fig. 8 und 9.

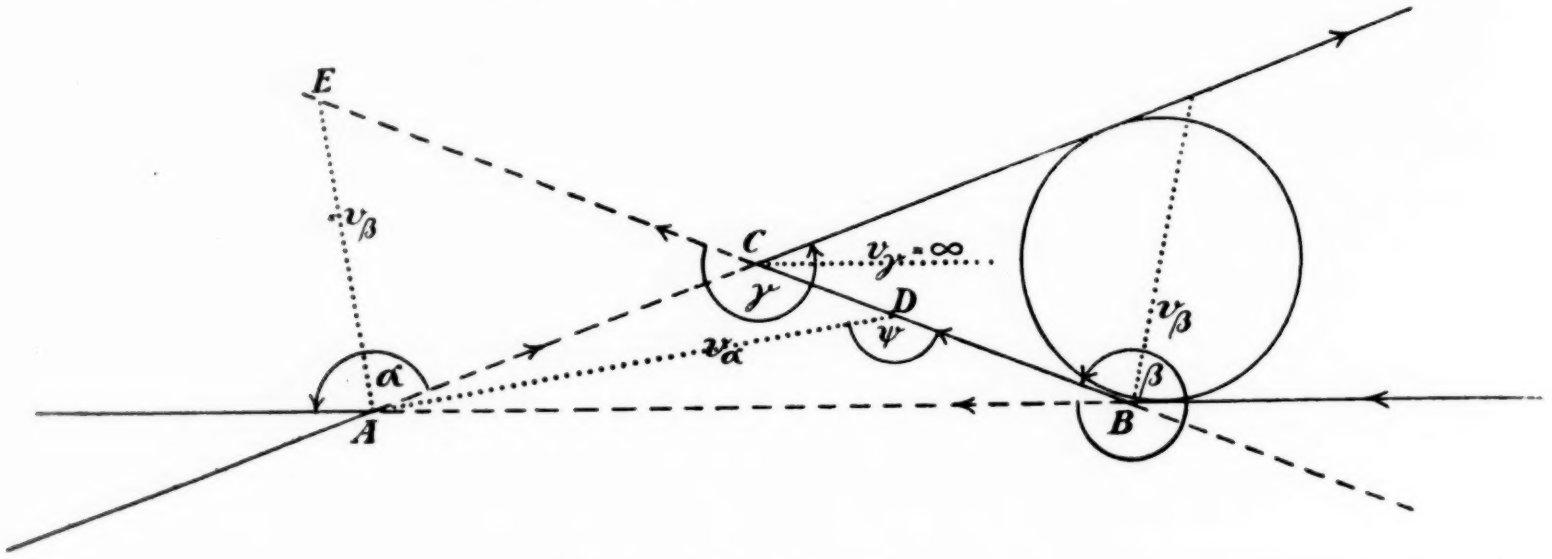

Fig. 8. $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = \sqrt{3} : 1 : \infty$
Lösung $m = 1$

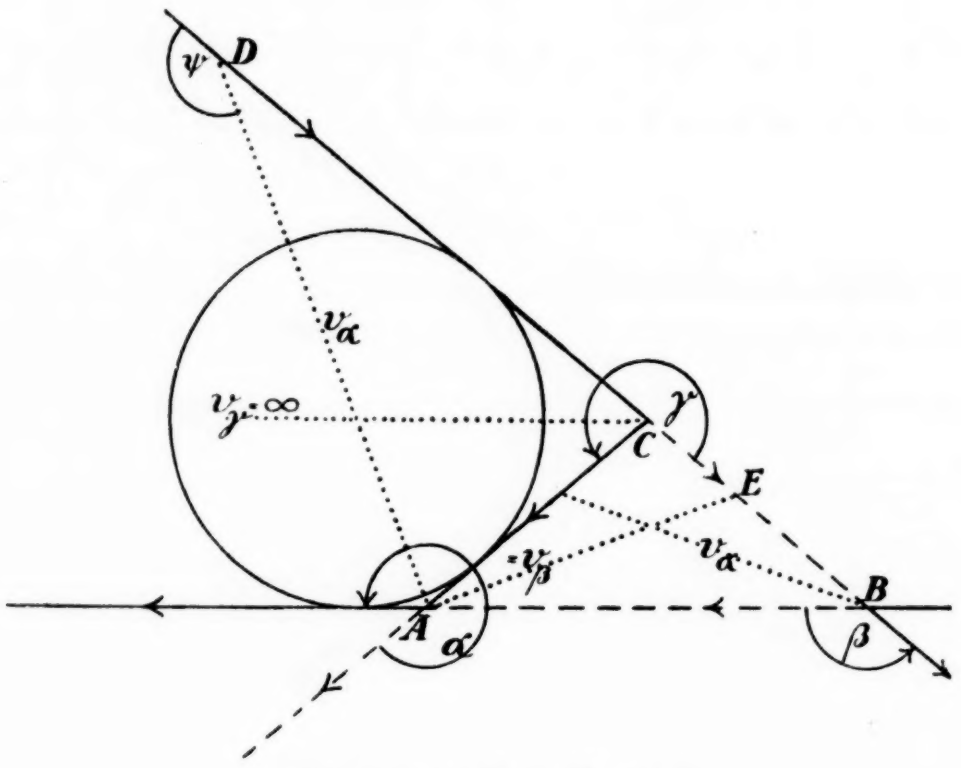

Fig. 9. $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma = \sqrt{3} : 1 : \infty$
Lösung $m = -1$

Die herangezogenen Fälle bestätigen die Gleichungen (9) und (11*) und geben einen Einblick in die Vielgestaltigkeit des Problems, sind aber weit davon entfernt, eine Theorie desselben zu liefern. Jedem Verhältnis $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma$ entsprechen 10 Verhältnisse $a : b : c$ der Dreiecksseiten, und es kann daher das Problem als eine gewisse algebraische Abbildung einer 10-fach überdeckten Kugelfläche auf eine einfache Kugelfläche aufgefaßt werden, nach folgenden Gesichtspunkten. Man trage auf den Achsen eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems v_α, v_β, v_γ ab, dann entspricht jedem Wertesystem v_α, v_β, v_γ ein Punkt des Raumes und jedem Verhältnis $v_\alpha : v_\beta : v_\gamma$ ein

Punkt (mit Gegenpunkt) auf der um den Koordinatenanfangspunkt gelegten Einheitskugel. Auf den Achsen eines zweiten Systems trage man a, b, c ab und umgebe auch dessen Anfangspunkt mit einer Einheitskugel, deren Punkte den Verhältnissen $a : b : c$ des Lösungsdreiecks entsprechen. Die $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$-Kugel besteht aus 10 Blättern, die längs gewisser Verzweigungskurven zusammenhängen, deren Punkte auf der a, b, c-Kugel offenbar als Bildpunkte ausgearteter Dreiecke abgebildet werden. Diese im Text beiseitegestellten Ausartungen gewinnen hier besondere Bedeutung. Längs der Bildpunkte dieser Ausartungen läßt die a, b, c-Kugel eine Teilung ihrer Oberfläche zu, deren Felder abwechselnd reellen und imaginären Dreiecksmannigfaltigkeiten entsprechen [6]).

[6]) Siehe des Verf. Arbeit l. c. [2]).

Eingegangen 3. März 1937.

Treue Darstellung Liescher Ringe.

Von *Ernst Witt* in Göttingen.

Ein *Liescher Ring* $\mathfrak{L}$ mit den Elementen $a, b, \ldots$ ist hinsichtlich der distributiven Multiplikation durch die Regeln

$$aa = 0, \quad (ab)\,c + (bc)\,a + (ca)\,b = 0$$

gekennzeichnet. Es folgt

$$ab + ba = (a+b)\,(a+b) - aa - bb = 0.$$

In einem *assoziativen Ring* $\mathfrak{A}$ mit den Elementen $A, B, \ldots$ werde die Kommutatorbildung $A \circ B = AB - BA$ eingeführt. Mit dem neuen Verknüpfungszeichen $\circ$ bilden die Elemente aus $\mathfrak{A}$ einen Lieschen Ring.

Bei einer *Darstellung* des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ im assoziativen Ring $\mathfrak{A}$ werden den Elementen a aus $\mathfrak{L}$ gewisse Elemente A aus $\mathfrak{A}$ zugeordnet, derart, daß $a + b$ und ab übergeht in $A + B$ bzw. $AB - BA$. Diese Darstellung heißt *treu*, wenn bei dieser Zuordnung nur die Null in Null übergeht.

Wir werden hier folgende Sätze beweisen:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{L}$ ein Liescher Ring mit dem Körper K als Operatorenbereich. Es gibt genau einen zugehörigen assoziativen Ring $\mathfrak{A}$, der folgende Eigenschaften aufweist:*

Der assoziative Ring $\mathfrak{A}$ enthält eine treue Darstellung (a) des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ und wird von ihr erzeugt;

wenn irgendein assoziativer Ring $\mathfrak{a}$ eine Darstellung $\bar{a}$ des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ enthält und von ihr erzeugt wird, so läßt sich der Ring in solcher Weise homomorph auf den Ring $\mathfrak{a}$ abbilden, daß dabei (a) in $\bar{a}$ übergeht.

Angeregt wurde diese Arbeit durch einen Vortrag von Magnus auf der Mathematikertagung in Bad Salzbrunn (September 1936). Magnus vermutete damals den

Satz 2. *Die durch Zuordnung s_i auf S_i entstehende Darstellung des freien Lieschen Ringes $\mathfrak{L}_q$ mit den q Erzeugenden s_i im freien assoziativen Ring $\mathfrak{A}_q$ mit den q Erzeugenden S_i ist treu.*

Satz 3. *Im freien Lieschen Ring bilden die homogenen Ausdrücke vom Grad n in den q Erzeugenden einen Modul Ψ_n vom Rang*

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\, q^{\frac{n}{d}}.$$

Die homogenen Ausdrücke vom Grad $n_1, \ldots, n_q$ in den Erzeugenden $s_1, \ldots, s_q$ bilden einen Modul $\Psi(n_1, \ldots, n_q)$ vom Rang

$$\psi(n_1, \ldots, n_q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n_i} \frac{\mu(d)\,\frac{n}{d}!}{\frac{n_1}{d}! \ldots \frac{n_q}{d}!} \qquad (n = n_1 + \cdots + n_q).$$

Es ist merkwürdig, daß die erste Rangformel übereinstimmt mit der bekannten Gaußschen Formel für die Anzahl der Primpolynome $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ im Galoisfeld von q Elementen. —

Wir werden zum Schluß noch einige Anwendungen auf die Gruppentheorie bringen. Für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ erklären wir rekursiv die Normalteiler $\mathfrak{G}^n$ ($\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$): Es sei $\mathfrak{G}^n$ die von allen Kommutatoren $a\,a_{n-1}\,a^{-1}\,a_{n-1}^{-1}$ (a aus $\mathfrak{G}$ und a_{n-1} aus $\mathfrak{G}^{n-1}$) erzeugte Untergruppe.

Satz 4. *Für die freie Gruppe $\mathfrak{G}_q$ mit q Erzeugenden ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_q^n/\mathfrak{G}_q^{n+1}$ isomorph mit der freien abelschen Gruppe von ψ_n Erzeugenden.*

1.

Beweis von Satz 1. Der Körper K sei Operatorenbereich des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$. Die Elemente von K und $\mathfrak{L}$ seien mit $\alpha, \beta, \ldots$ bzw. mit $a, b, \ldots$ bezeichnet. $\mathfrak{L}$ hat als K-Modul eine (wohl-)geordnete Basis $u_1, u_2, \ldots$ derart, daß sich jedes Element a auf genau eine Weise als endliche Summe $a = \sum \alpha_i u_i$ darstellen läßt.

(Wer das Auswahlpostulat vermeiden will, möge sich auf Liesche Ringe $\mathfrak{L}$ mit abzählbarer Basis beschränken. Zum Beweis von Satz 2 ist das auch vollständig genügend. Im nicht abzählbaren Fall müssen zur Numerierung der Basiselemente auch transfinite Ordnungszahlen verwendet werden.)

Wir führen den K-Modul $\mathfrak{A}$ ein, dessen Basiselemente die Klammersymbole

$$(u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}) \qquad (i_1 \leqq \cdots \leqq i_r)$$

sind.

Hilfssatz. Innerhalb $\mathfrak{A}$ lassen sich allgemeinere Klammersymbole $(a_1, \ldots, a_r)$ erklären mit den Eigenschaften

I. $(\ldots, a, b, \ldots) - (\ldots, b, a, \ldots) = (\ldots, ab, \ldots)$,

II. $(a_1, \ldots, a_r)$ *ist linear in jeder Komponente.*

Für eingliedrige Klammersymbole (a) ist dies selbstverständlich.

Wir nehmen an, für $r < n$ seien schon allgemeine Klammersymbole $(a_1, \ldots, a_r)$ eingeführt. Es ist zu beweisen, daß innerhalb $\mathfrak{A}$ auch die Klammern $(a_1, \ldots, a_n)$ eindeutig so eingeführt werden können, daß I und II erfüllt ist.

Klammern $(a_1, \ldots, a_n)$ mit n Komponenten aus dem Lieschen Ring behandeln wir zunächst als Unbestimmte. Ferner seien $t_1, \ldots, t_{n-1}$ assoziative Unbestimmte. Wir führen Operatoren P_{t_i} und Q_{t_i} ein durch

$$(1) \qquad P_{t_i}(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n),$$

$$(2) \qquad Q_{t_i}(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_i\,a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

und setzen für irgendein Produkt $A = t_\alpha t_\beta \cdots t_\delta$

$$(3a) \qquad P_{t_\alpha t_\beta \cdots t_\delta} = P_{t_\alpha} P_{t_\beta} \cdots P_{t_\delta}$$

und

$$(3b) \qquad Q_{t_\alpha t_\beta t_\gamma \cdots t_\delta} = Q_{t_\alpha} P_{t_\beta t_\gamma \cdots t_\delta} + Q_{t_\beta} P_{t_\gamma \cdots t_\delta} + \cdots + Q_{t_\delta}.$$

Es folgen die Regeln

$$(4) \qquad P_{AB} = P_A P_B \quad \text{und} \quad Q_{AB} = Q_A P_B + Q_B.$$

Es ist klar, daß für die Größen

$$(5) \qquad E = t_i^2, \quad (t_i t_{i-1})^3, \quad (t_i t_{i-\nu})^2 \qquad (\nu \geqq 2)$$

$P_E = 1$ ist. Wir zeigen jetzt, daß $Q_E = 0$ ist, und zwar berechnen wir der einfacheren Schreibweise halber für jeden Typus von E jeweils ein Beispiel.

Für $E = t_1^2$ ist $Q_E(a, b, *) = (ab, *) + (ba, *) = 0.$

Für $E = (t_2 t_1)^3$ ist $Q_E(a, b, c, *)$

$$= (ab, \underbrace{c, *) + (c}, ba, *) + (bc, \underbrace{a, *) + (a}, cb, *) + (ca, \underbrace{b, *) + (b}, ac, *)$$

$$= \underbrace{(ab \cdot c, *)}_{} + \underbrace{(bc \cdot a, *)}_{} + \underbrace{(ca \cdot b, *)}_{} = 0.$$

Für $E = (t_3 t_1)^2$ ist $Q_E(a, b, c, d, *)$

$$= (ab, c, \underbrace{d, *) + (ba}, d, c, *) + (a, b, \underbrace{dc, *) + (b}, a, cd, *)$$

$$= \underbrace{(ab, cd, *)}_{} + \underbrace{(ab, dc, *)}_{} = 0.$$

Aus $P_E = 1$ und $Q_E = 0$ folgt nach (4)

$$P_{AEB} = P_{AB} \quad \text{und} \quad Q_{AEB} = Q_{AB}, \tag{6}$$

in den Indizes von P und Q dürfen also solche E immer durch 1 ersetzt werden.

Nach E. H. Moore wird die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ der Ordnung $n!$ abstrakt durch die Relationen

$$(t_i t_k)^{m_{ik}} = 1, \qquad m_{ik} = \begin{cases} 3 \text{ für } i - k = \pm 1 \\ 2 \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad (i, k = 1, \ldots, n-1) \tag{7}$$

geliefert [1]). Wir sind demnach berechtigt, die Indizes von P und Q als Elemente der symmetrischen Gruppe anzusehen. Überdies können wir die Permutationen P_π mit π identifizieren.

Wir gehen nun aus von einem Basiselement des Moduls $\mathfrak{A}$

$$U = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \qquad (i_1 \leqq \cdots \leqq i_n). \tag{8}$$

Wenn $\pi\varepsilon U = \pi U$ ist $(\varepsilon \neq 1)$, so ist $\varepsilon U = U$, d. h. einige i_ν sind einander gleich. Eine Permutation ε, welche die Klammer U nicht ändert, kann als Produkt von solchen Transpositionen t_i mit $t_i U = U$ dargestellt werden. Für diese t_i ist $Q_{t_i} U = 0$, daher ist auch $Q_\varepsilon U = 0$. So folgt schließlich $Q_{\pi\varepsilon} U = Q_\pi U$.

Demnach tritt auch im Fall einiger gleicher i_ν keine Mehrdeutigkeit auf, wenn wir das permutierte Symbol πU durch das Element $U - Q_\pi U$ des Moduls $\mathfrak{A}$ erklären:

$$\pi U = U - Q_\pi U. \tag{9}$$

Für diese Elemente πU folgt nach (4) die Regel I:

$$\pi U - t_i \pi U = Q_{t_i} \pi U.$$

Klammern mit allgemeinen Komponenten $a_\nu = \sum_j \alpha_{\nu j} u_j$ erklären wir jetzt innerhalb $\mathfrak{A}$ durch

$$(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} \alpha_{1 j_1} \cdots \alpha_{n j_n} (u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}). \tag{10}$$

Da für die in dieser Weise eingeführten Klammern $(a_1, \ldots, a_n)$ die Regeln II und I bestehen, ist der Induktionsbeweis für den Hilfssatz beendet.

2.

Im Modul $\mathfrak{A}$ führen wir nunmehr eine beiderseitig distributive Multiplikation ein, indem wir die Produkte der Basiselemente definieren:

$$(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \cdot (u_{k_1}, \ldots, u_{k_m}) = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}, u_{k_1}, \ldots, u_{k_m}), \quad (i_1 \leqq \cdots \leqq i_n; k_1 \leqq \cdots \leqq k_m).$$

Durch Induktion nach $n + m$ folgt aus I und II, daß auch die Multiplikation beliebiger Klammern nach derselben Vorschrift erfolgt:

III. $$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m).$$

[1]) L. E. Dickson, Linear groups (Lpz. 1901), p. 287.

Aus dieser Regel ist ersichtlich, daß $\mathfrak{A}$ bei dieser Multiplikation ein assoziativer Ring ist. Wegen der aus I und III folgenden Regel

$$(ab) = (a, b) - (b, a) = (a)\,(b) - (b)\,(a)$$

erfährt der Liesche Ring $\mathfrak{L}$ durch die Zuordnung a auf (a) eine treue Darstellung in unserem konstruierten assoziativen Ring $\mathfrak{A}$. –

Es sei $\mathfrak{a}$ irgendein assoziativer Ring, der eine Darstellung $\bar{a}$ des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ enthält und von ihr erzeugt wird. Durch die Basiszuordnung

$$(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \text{ auf } \bar{u}_{i_1}, \ldots, \bar{u}_{i_n} \qquad (i_1 \leqq \cdots \leqq i_n)$$

wird zunächst $\mathfrak{A}$ als Modul homomorph auf einen Teil von $\mathfrak{a}$ abgebildet. Durch Induktion nach n folgt aus I und II, daß dabei auch beliebige Klammern nach derselben Vorschrift abgebildet werden, nämlich

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ auf } \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n .$$

Hieraus ist ersichtlich, daß Produkte in Produkte übergehen, daß jedes Element von $\mathfrak{a}$ Bild ist, und daß bei dieser Ringabbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{a}$ die Darstellung (a) in die Darstellung $\bar{a}$ des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ übergeht.

Damit ist gezeigt, daß unser assoziativer Ring $\mathfrak{A}$ alle Eigenschaften aufweist, wie sie in Satz 1 gefordert werden.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein assoziativer Ring, der eine treue Darstellung $[a]$ des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ enthält und von ihr erzeugt wird. Ferner habe $\mathfrak{B}$ die in Satz 1 geforderten Eigenschaften. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ lassen sich dann so aufeinander abbilden, daß sich dabei die Darstellungen (a) und $[a]$ entsprechen. Da diese Darstellungen schon die ganzen Ringe erzeugen, ist $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Damit ist Satz 1 in allen Teilen bewiesen.

3.

Beweis von Satz 2. Es werde $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_q$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}_q$ gesetzt. Nach Satz 1 läßt sich dann der Ring $\mathfrak{A}$ in solcher Weise auf $\mathfrak{A}_q$ abbilden, daß dabei die erzeugenden Elemente (s_i) von $\mathfrak{A}$ in die freien Erzeugenden S_i von $\mathfrak{A}_q$ übergehen. Dies ist aber nur möglich, falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_q$, und hieraus folgt der Satz 2.

Beweis von Satz 3. Im freien Lieschen Ring $\mathfrak{L}_q$ sei $u_{n1}, \ldots, u_{n\psi_n}$ eine Basis des Moduls Ψ_n aller homogenen Ausdrücke vom Grad n in den q Erzeugenden s_i. Dann ist

$$u_{11}, \ldots, u_{1\psi_1}, \quad u_{21}, \ldots, u_{2\psi_2}, \text{ usw.}$$

eine geordnete Basis für $\mathfrak{L}_q$. Da $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_q$ ist, gibt es genau q^n Basisklammern

$$(u_{\alpha *}, \ldots, u_{\beta *}) \qquad \text{(mit geordneten Komponenten)}$$

vom Grade $n = \alpha + \cdots + \beta$ in den Erzeugenden (s_i) des Ringes $\mathfrak{A}$. Diese Tatsache bedeutet das koeffizientenweise Übereinstimmen der formalen Potenzreihen

$$(1 - qx)^{-1} = \prod_{d=1}^{\infty} (1 - x^d)^{-\psi_d} . \tag{11}$$

Der Logarithmus hiervon ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qx)^n}{n} = \sum_{d,\nu=1}^{\infty} \psi_d \frac{x^{d\nu}}{\nu} . \tag{12}$$

Die Koeffizienten von x^n/n in (12) lauten

$$q^n = \sum_{d|n} d\psi_d . \tag{13}$$

Nach der Möbiusschen Umkehrung folgt somit die erste Formel von Satz 3

$$n\psi_n = \sum_{d|n} \mu(d) q^{\frac{n}{d}} . \tag{14}$$

Für $\psi(n_1, \ldots, n_q)$ gilt entsprechend die Identität

$$(1 - x_1 - \cdots - x_q)^{-1} = \prod_{d_1,\ldots,d_q} (1 - x_1^{d_1} \cdots x_q^{d_q})^{-\psi(d_1,\ldots,d_q)} ,$$

in den vertauschbaren Unbestimmten $x_1, \ldots, x_q$. Nach Vornahme derselben Umformungen wie oben ergibt sich hieraus die zweite Formel von Satz 3. —

Für einen Lieschen Ring führen wir rekursiv die Ideale $\mathfrak{L}^n = \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{n-1}$ ($\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}$) ein. Aus den allgemeinen Rechenregeln folgt leicht durch Induktion nach k die Tatsache $\mathfrak{L}^i\mathfrak{L}^k \leqq \mathfrak{L}^{i+k}$. Im freien Lieschen Ring $\mathfrak{L}_q$ setzt sich daher $\mathfrak{L}_q^n$ aus allen Ausdrücken vom n-ten und höheren Grad zusammen.

Ferner werde das Zentrum eines Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ eingeführt. Es besteht aus allen Elementen z mit $z\mathfrak{L} = 0$.

Wir behaupten den

Satz 5. *Der freie Liesche Ring $\mathfrak{L}_q$ ($q > 1$) hat kein Zentrum. Der Faktorring $\mathfrak{L}_q/\mathfrak{L}_q^{n+1}$ hat das Zentrum $\mathfrak{L}_q^n/\mathfrak{L}_q^{n+1}$ vom Rang ψ_n.*

Beweis. Es ist leicht einzusehen, daß im freien assoziativen Ring $\mathfrak{A}_q$ die Elemente αS_1^f die einzigen homogenen Ausdrücke sind, welche mit der Erzeugenden S_1 vertauschbar sind. Wenn alle Erzeugenden S_i einander gleichgesetzt werden, gehen alle Kommutatorbildungen in 0 über. Daher kann S_1^f für $f > 1$ nicht in der Darstellung von $\mathfrak{L}_q$ liegen. Es folgt:

Die Gleichung $xs_1 = 0$ hat in $\mathfrak{L}_q$ nur die Lösung $x = \alpha s_1$.

Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{L}_q$ ($q > 1$) kein Zentrum hat. Eine leichte Folgerung ist, daß $\mathfrak{L}_q/\mathfrak{L}_q^{n+1}$ das Zentrum $\mathfrak{L}_q^n/\mathfrak{L}_q^{n+1}$ besitzt.

4.

Wir kommen nun zum gruppentheoretischen Teil der Arbeit.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe mit den Elementen $a, b, \ldots$. Wir setzen

$$a \circ b = aba^{-1}b^{-1} \text{ und } b^a = aba^{-1} . \tag{15}$$

Satz 6. *Folgende Identitäten gelten identisch in a, b, c:*

$$a \circ a = 1, \quad (a \circ b) \cdot (b \circ a) = 1, \quad a \circ 1 = 1; \tag{16}$$

$$a \circ (bc) = (a \circ b) \cdot (a \circ c)^b; \tag{17}$$

$$\begin{aligned}(a \circ (b \circ c)) \cdot (b \circ (c \circ a)) \cdot (c \circ (a \circ b)) \\ = (b \circ c)^a (c \circ b) (c \circ a)^b (c \circ b)^a (a \circ b) (a \circ c)^b (b \circ c) (b \circ a).\end{aligned} \tag{18}$$

Eine Probe kann in wenigen Minuten durch direktes Ausrechnen gemacht werden.

Die folgenden Sätze 7, 8, 9 stammen von P. Hall [2]). Wir werden sie mit Satz 6 beweisen.

Es seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit den Elementen u bzw. v. Die von allen Kommutatoren $u \circ v$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ werde mit $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{V}$ bezeichnet. Mit $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ ist auch $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{V}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und liegt im Durchschnitt $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}$.

Satz 7. *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ seien drei Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Aus $\mathfrak{A} \circ (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C}) = \mathfrak{B} \circ (\mathfrak{C} \circ \mathfrak{A}) = 1$ folgt $\mathfrak{C} \circ (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}) = 1$.

---

[2]) P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **36** (1934).

Beweis. Es seien a, b, c beliebige Elemente aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Nach Voraussetzung ist a mit $b \circ c$ und b mit $a \circ c$ vertauschbar, daher dürfen in der rechten Seite von (18) alle Exponenten gestrichen werden. Ferner sind $a \circ b$ und $a \circ c$ als Elemente aus $\mathfrak{A}$ mit $b \circ c$ vertauschbar, und $a \circ b$ ist als Element aus $\mathfrak{B}$ mit $a \circ c$ vertauschbar. Die rechte Seite von (18) wird also gleich 1, weil sich alle vertauschbaren Klammern kürzen lassen. Auf der linken Seite sind die beiden ersten Faktoren gleich 1, daher folgt

$$c \circ (a \circ b) = 1, \quad c \circ (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}) = 1, \quad \mathfrak{C} \circ (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}) = 1, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir führen jetzt rekursiv die charakteristischen Normalteiler $\mathfrak{G}^n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein durch $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{G}^{n-1}$ $(\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G})$.

Satz 8. *Für die Normalteiler $\mathfrak{G}^n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ gilt die Regel*

$$\mathfrak{G}^i \circ \mathfrak{G}^k \leqq \mathfrak{G}^{i+k}.$$

Beweis. Für $k = 1$ ist $\mathfrak{G}^i \circ \mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}^{i+1}$. Es sei jetzt $k > 1$ und der Satz schon bis $k - 1$ und für beliebiges i bewiesen. Es werde $\mathfrak{G}^{i+k} = 1$ gesetzt. Dann ist

$$\mathfrak{G}^1 \circ (\mathfrak{G}^{k-1} \circ \mathfrak{G}^i) \leqq \mathfrak{G}^1 \circ \mathfrak{G}^{i+k-1} = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^{k-1} \circ (\mathfrak{G}^i \circ \mathfrak{G}^1) \leqq \mathfrak{G}^{k-1} \circ \mathfrak{G}^{i+1} = 1,$$

also nach Satz 7 auch $\mathfrak{G}^i \circ \mathfrak{G}^k = \mathfrak{G}^i \circ (\mathfrak{G}^1 \circ \mathfrak{G}^{k-1}) = 1$.

Mit Satz 8 folgt leicht aus (17) und (16)

Satz 9. *Mit einem Element a aus $\mathfrak{G}^\alpha$ und mit Elementen b, b' aus $\mathfrak{G}^\beta$ gelten die Regeln*

$$a \circ (b \cdot b') \equiv (a \circ b) \cdot (a \circ b') \quad \text{und} \quad (b \cdot b') \circ a \equiv (b \circ a) \cdot (b' \circ a) \bmod \mathfrak{G}^{\alpha+\beta+1}.$$

Satz 10. *Mit Elementen a, b, c aus $\mathfrak{G}^\alpha$, $\mathfrak{G}^\beta$, $\mathfrak{G}^\gamma$ gilt die Regel*

$$(a \circ (b \circ c)) \cdot (b \circ (c \circ a)) \cdot (c \circ (a \circ b)) \equiv 1 \bmod \mathfrak{G}^{\alpha+\beta+\gamma+1}.$$

Beweis. Es werde $\mathfrak{G}^{\alpha+\beta+\gamma+1} = 1$ gesetzt. Auf der rechten Seite von (18) kann $(a \circ b)$ gegen $(b \circ a)$, und $(a \circ c)^b$ gegen $(c \circ a)^b$ gekürzt werden. Übrig bleibt

$$(b \circ c)^a (c \circ b) \cdot (c \circ b)^a (b \circ c) = (a \circ (b \circ c)) \cdot (a \circ (c \circ b)),$$

und nach Satz 9 ist dies gleich 1.

Hilfssatz. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ werde von den Elementen σ_i erzeugt. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^{n+1}$ wird dann erzeugt von allen Ausdrücken*

$$\sigma_{i_1 \dots i_n} = \sigma_{i_1} \circ (\sigma_{i_2} \circ (\cdots \circ \sigma_{i_n}) \cdots).$$

Beweis. Es sei $n > 1$ und der Hilfssatz bis $n - 1$ bewiesen. $\mathfrak{G}^{n-1}/\mathfrak{G}^n$ wird erzeugt von allen Ausdrücken $\sigma_{i_2 \dots i_n}$, daher wird $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{G}^{n-1}$ von Elementen der Gestalt

$$x_n = \Big(\prod_{i_1} \sigma_{i_1}^{\pm 1}\Big) \circ \Big(a_n \cdot \prod_{i_2, \dots, i_n} \sigma_{i_2 \dots i_n}^{\pm 1}\Big)$$

mit a_n aus $\mathfrak{G}^n$ erzeugt. Nach Satz 9 folgt

$$x_n \equiv \prod_{i_1} (\sigma_{i_1}^{\pm 1} \circ a_n) \cdot \prod_{i_1, \dots, i_n} (\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2 \dots i_n})^{\pm 1} \equiv \prod_{i_1, \dots, i_n} \sigma_{i_1 \dots i_n}^{\pm 1} \bmod \mathfrak{G}^{n+1}.$$

5.

Wir führen von nun an folgende Bezeichnungen ein:

$\mathfrak{L}_q$ sei der ganzzahlige freie Liesche Ring mit q Erzeugenden s_i,
$\mathfrak{A}_q$ der ganzzahlige freie assoziative Ring mit q Erzeugenden S_i;

auch für diese Ringe gelten die Sätze 2 und 3.

$\mathfrak{G}_q$ sei die freie Gruppe mit q Erzeugenden σ_i.

$\mathfrak{D}_q$ sei der ganzzahlige freie distributive Ring mit q Erzeugenden s_i, d. h. in $\mathfrak{D}_q$ bestehen für die Multiplikation nur die beiden Distributivgesetze.

Λ sei die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{D}_q$ auf $\mathfrak{L}_q$, das dabei entstehende

Ideal $\mathfrak{J}$ wird erzeugt von den Größen xx, $x(yz) + y(zx) + z(xy)$ in $\mathfrak{D}_q$.

Δ sei die Abbildung von $\mathfrak{L}_q$ in $\mathfrak{A}_q$ gemäß Satz 2.

Γ bilde die Monome u aus $\mathfrak{D}_q$ auf die entsprechenden Kommutatoren Γu von $\mathfrak{G}_q$ ab, z. B. gehe dabei $u = (s_1(s_2 s_3))\,(s_4 s_4)$ über in $\Gamma u = (\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)) \circ (\sigma_4 \circ \sigma_4)$.

$\mathfrak{U}$ sei die in $\mathfrak{D}_q$ folgendermaßen erklärte Menge von Elementen U:

(a) $\mathfrak{U}$ enthält alle Ausdrücke uu, $uv + vu$, $u(vw) + v(wu) + w(uv)$ mit Monomen u, v, w;
(b) mit Σu_ν enthält $\mathfrak{U}$ auch noch $\Sigma v u_\nu$ und $\Sigma u_\nu v$.

Die Elemente U der Menge $\mathfrak{U}$ sind durchweg Summen von höchstens drei Monomen gleichen Grades in den Erzeugenden. Wir erklären jetzt die Abbildung Γ auch für diese Elemente $U = \Sigma u_\nu$ durch $\Gamma U = \Pi(\Gamma u_\nu)$, wobei die Reihenfolge der Faktoren willkürlich festgesetzt werde.

Die Menge $\mathfrak{U}$ hat zwei wichtige Eigenschaften:

(19) Jedes Element des Ideals $\mathfrak{J}$ ist nach dem Distributivgesetz als $\Sigma \pm U_\mu$ darstellbar.

Auf Grund der Entstehungsweise der Menge $\mathfrak{U}$ folgt nach (16) und nach den Sätzen 8, 9, 10:

$$(20) \qquad \Gamma U \equiv 1 \bmod \mathfrak{G}^{n+1} \qquad (U \text{ vom Grade } n).$$

Nunmehr schreiten wir zum

Beweis von Satz 4. Die unendlichen Reihen

$$X = 1 + A_1 + A_2 + \cdots \qquad (A_n \text{ homogen vom Grad } n \text{ aus } \mathfrak{A}_q)$$

bilden bei formaler Multiplikation eine Gruppe $\mathfrak{X}$. Diese Gruppe wurde von Magnus eingeführt. Für die Reihen

$$X = 1 + A_i + \cdots, \quad X' = 1 + A_i' + \cdots, \quad Y = 1 + B_k + \cdots$$

ergibt sich

$$(21) \quad X \cdot X' = 1 + (A_i + A_i') + \cdots \text{ und } XYX^{-1}Y^{-1} = 1 + (A_iB_k - B_kA_i) + \cdots,$$

wobei jeweils Glieder höheren Grades fortgelassen sind.

Durch $\Phi(\sigma_i) = 1 + S_i$ entsteht eine homomorphe Abbildung Φ der freien Gruppe $\mathfrak{G}_q$ auf einen Teil der Gruppe $\mathfrak{X}$. Für ein Element g aus $\mathfrak{G}_q$ sei dabei in der Reihenentwicklung

$$\Phi(g) = 1 + \varphi_1(g) + \varphi_2(g) + \cdots$$

$\varphi_n(g)$ das homogene Glied vom Grad n aus $\mathfrak{A}_q$. Für ein Element g_n aus $\mathfrak{G}_q^n$ beginnt nach der rekursiven Definition $\mathfrak{G}_q^n = \mathfrak{G}_q \circ \mathfrak{G}_q^{n-1}$ und nach (21) die Reihenentwicklung frühestens mit dem Glied $\varphi_n(g_n)$, während alle vorangehenden Glieder verschwinden:

$$\Phi(g_n) = 1 + \varphi_n(g_n) + \varphi_{n+1}(g_n) + \cdots.$$

Da ebenso $\varphi_n(g_{n+1}) = 0$ ist, wird durch φ_n eine homomorphe Abbildung der abelschen Faktorgruppe $\mathfrak{G}_q^n/\mathfrak{G}_q^{n+1}$ auf gewisse Ausdrücke n-ten Grades von $\mathfrak{A}_q$ geliefert, wobei Produkte in Summen übergehen. Diese Abbildung φ_n wollen wir näher untersuchen.

Nach dem Hilfssatz des vorigen Abschnitts dürfen wir

$$g_n \equiv \prod_\nu (\Gamma u_\nu)^{\pm 1} \bmod G_q^{n+1} \qquad \text{(in } \mathfrak{G}_q\text{)} \tag{22}$$

mit Monomen u_ν aus $\mathfrak{D}_q$ vom Grad n ansetzen. Aus der Rechenregel (21) folgt

$$\varphi_n(g_n) = \Delta \wedge \sum_\nu \pm u_\nu \qquad \text{(in } \mathfrak{A}_q\text{)}.$$

$\varphi_n(g_n)$ liegt also in der Darstellung des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}_q$ in $\mathfrak{A}_q$. Da diese Darstellung treu ist, folgt

$$\Delta^{-1}\varphi_n(g_n) = \wedge \sum_\nu \pm u_\nu \qquad \text{(in } \mathfrak{L}_q\text{)}. \tag{23}$$

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{G}_q^n/\mathfrak{G}_q^{n+1}$ durch die Abbildung $\Delta^{-1}\varphi_n$ auf den ganzen Modul Ψ_n aller homogenen Elemente n-ten Grades des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}_q$ abgebildet wird. Da Ψ_n nach Satz 3 den Rang ψ_n hat, brauchen wir zum Beweis von Satz 4 nur noch zu zeigen, daß $\Delta^{-1}\varphi_n$ eine Isomorphie

$$\mathfrak{G}_q^n/\mathfrak{G}_q^{n+1} \cong \Psi_n \tag{24}$$

vermittelt.

Es sei dazu g_n ein Element aus $\mathfrak{G}_q^n$ mit $\Delta^{-1}\varphi_n(g_n) = 0$. Wegen (23) liegt dann $\sum_\nu \pm u_\nu$ im Ideal $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{D}_q$, und nach (19) gilt

$$\sum_\nu \pm u_\nu = \sum_\mu \pm U_\mu \qquad (U_\mu \text{ aus } \mathfrak{U} \text{ vom Grad } n).$$

Diese Gleichung ist eine rein additive Umformung. Da $\mathfrak{G}_q^n/\mathfrak{G}_q^{n+1}$ abelsch ist und wegen (20) folgt jetzt

$$\prod_\nu (Lu_\nu)^{\pm 1} \equiv \prod_\mu (LU_\mu)^{\pm 1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{G}_q^{n+1},$$

und wegen (22) ist bewiesen, daß g_n sogar in $\mathfrak{G}_q^{n+1}$ liegt. Damit ist die Isomorphie (24) und der Satz 4 bewiesen.

6.

In Bad Salzbrunn vermutete Magnus den folgenden Satz, den wir eben zugleich mitbewiesen haben:

Satz 11. *Es sei g ein Element aus $\mathfrak{G}_q^n$, das nicht in $\mathfrak{G}_q^{n+1}$ liegt. In der oben erklärten Reihenentwicklung*

$$\Phi(g) = 1 + \varphi_1(g) + \varphi_2(g) + \cdots$$

ist dann $\varphi_n(g) \neq 0$, während alle vorangehenden Glieder verschwinden. Dies Anfangsglied $\varphi_n(g)$ liegt in der Darstellung des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}_q$ in den assoziativen Ring $\mathfrak{A}_q$.

Es sei dazu folgende Ergänzung erwähnt:

Satz 12. *Durch die oben erklärte Reihenentwicklung*

$$\Phi(g) = 1 + \varphi_1(g) + \varphi_2(g) + \cdots$$

entsteht eine isomorphe Abbildung Φ der freien Gruppe $\mathfrak{G}_q$ auf einen Teil der Gruppe $\mathfrak{X}$ aller Reihen

$$X = 1 + A_1 + A_2 + \cdots \qquad (A_i \text{ aus } \mathfrak{A}_q).$$

(Die Isomorphie bleibt bestehen, wenn die Reihen nur mod p betrachtet werden.)

Die unendliche Kette $\mathfrak{G}_q^1, \mathfrak{G}_q^2, \mathfrak{G}_q^3, \ldots$ hat den Durchschnitt 1.

Beweis. Für

$$g = \sigma_{i_1}^{\alpha_1}\sigma_{i_2}^{\alpha_2}\cdots\sigma_{i_l}^{\alpha_l} \neq 1 \qquad (\sigma_{i_1} \neq \sigma_{i_2} \neq \cdots \neq \sigma_{i_l};\ \alpha_i \neq 0)$$

treten in der Reihe

$$\Phi(g) = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_l} \binom{\alpha_1}{\nu_1} \cdots \binom{\alpha_l}{\nu_l} S_{i_1} \cdots S_{i_l}$$

sicher Glieder mit lauter positiven Exponenten ν_i wirklich auf (sogar mod p), und zwar sind diese Glieder wegen $S_{i_1} \neq S_{i_2} \neq \cdots \neq S_{i_l}$ alle untereinander verschieden. Also folgt $\Phi(g) \neq 1$.

Speziell kommt $\alpha_1 \cdots \alpha_l S_{i_1} \cdots S_{i_l} \neq 0$ vor, daher liegt nach dem vorigen Satz das Element g nicht in $\mathfrak{G}_q^{l+1}$. —

Zum Schluß teilen wir noch folgendes Gegenstück zu Satz 5 mit:

Satz 13. *Die freie Gruppe* $\mathfrak{G}_q$ $(q > 1)$ *hat kein Zentrum.* $\mathfrak{G}_q/\mathfrak{G}_q^{n+1}$ *hat das Zentrum* $\mathfrak{G}_q^n/\mathfrak{G}_q^{n+1}$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt z. B. aus der elementaren Tatsache, daß eine Erzeugende nur mit ihren Potenzen vertauschbar ist. Die zweite Behauptung ergibt sich folgendermaßen: Es sei z ein Zentrumselement von $\mathfrak{G}_q/\mathfrak{G}_q^{n+1}$. Die Reihenentwicklung $\Phi(z)$ beginne mit dem ν-ten Glied, z liege also in $\mathfrak{G}_q^\nu$. Es sei etwa $\varphi_\nu(z) \neq \alpha S_1$. Da nach Satz 11 $\varphi_\nu(z)$ in der Darstellung von $\mathfrak{L}_q$ in $\mathfrak{A}_q$ liegt, ist, wie schon früher bemerkt, $\varphi_{\nu+1}(z \circ \sigma_1) = \varphi_\nu(z) \cdot S_1 - S_1 \cdot \varphi_\nu(z) \neq 0$. Weil $z \circ \sigma_1$ in $\mathfrak{G}_q^{n+1}$ liegt, folgt $\nu \geqq n$, und z liegt in $\mathfrak{G}_q^n$. Umgekehrt liegen alle Elemente von $\mathfrak{G}_q^n$ im Zentrum von $\mathfrak{G}_q/\mathfrak{G}_q^{n+1}$, w. z. b. w.

Müllheim (Baden), 10. Oktober 1936.

Eingegangen 13. Oktober 1936.

Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. I.*)

Von *Max Deuring* in Leipzig.

Einleitung.

1. In einer Reihe von Arbeiten über abstrakte elliptische Funktionenkörper [1]) hat H. Hasse gezeigt, daß die algebraischen Eigenschaften eines algebraischen Funktionenkörpers vom Geschlecht 1, die sich aus seiner Darstellung als Körper von doppeltperiodischen Funktionen einer komplexen Variablen ergeben, nicht auf diesen klassischen Fall beschränkt sind, sondern auch bei abstrakten Funktionenkörpern vom Geschlecht 1 über irgendeinem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper zu finden sind. Es ist wünschenswert, die entsprechenden algebraischen Eigenschaften der Körper höheren Geschlechts aufzufinden.

Es ist bekannt, daß die *komplexen Multiplikationen* in sich der Periodenmatrix der Integrale erster Gattung eines algebraischen Funktionenkörpers einer komplexen Variablen mit den *Korrespondenzen* einer zu diesem Körper gehörigen irreduziblen algebraischen Kurve zusammenhängen. Wir kommen auf diesen Zusammenhang am Schluß der Arbeit ausführlich zu sprechen. Die angestrebte Verallgemeinerung der Hasseschen Resultate muß hiernach in der *algebraischen Theorie* dieser Korrespondenzen zu suchen sein. Für diese Theorie sei auf F. Severi, Trattato di geometria algebrica, vol. I, parte I, Bologna 1927, insbesondere Cap. 6 verwiesen. Die hier entwickelte Theorie ist davon unabhängig entstanden. Erst nachträglich wurde ihre Übereinstimmung mit der dort entwickelten Theorie erkannt. Es erscheint mir aber dennoch gerechtfertigt, meine neuen Beweise, die der arithmetischen Auffassung der algebraischen Funktionen entsprungen sind, hier zu veröffentlichen, weil sie, wie ich glaube, der Natur der in Rede stehenden Probleme besonders angepaßt sind.

2. Wir erklären eine Korrespondenz eines algebraischen Funktionenkörpers K der Unbestimmten x zu einem algebraischen Funktionenkörper K der Unbestimmten ξ über dem gleichen algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k auf die folgende

---

*) Den Herren H. Hasse und H. L. Schmid habe ich für eine große Reihe von Verbesserungen und Vereinfachungen zu danken.

[1]) H. Hasse, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934); Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen N. F. (I) **1** (1935); Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III, Journ. f. Math. **175** (1936). — Die zweite dieser drei letzten Arbeiten zitieren wir im folgenden mit H II.

Weise: Wir bilden das Kompositum $K\mathsf{K}$ und sehen es als Funktionenkörper von ξ mit dem Konstantenkörper K an. Jeder Divisor $\mathfrak{D}$ von $K\mathsf{K}/K$ definiert in bestimmter Weise eine Funktion $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ der Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k, deren Werte Divisoren von K/k eines festen Grades (des Grades von $\mathfrak{D}$) sind. $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ kann ungenau als der „Rest von $\mathfrak{D}$ mod. $\mathfrak{p}$" bezeichnet werden. Die Abbildung $\mathfrak{p} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ heißt eine *Korrespondenz von K zu* K. Dieser Begriff, der im folgenden genau entwickelt wird, deckt sich dem Umfang nach mit dem klassischen Begriff der Korrespondenz.

Wir erweitern die Definition von $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ formal auf zusammengesetzte Divisoren $\mathfrak{a}$, indem wir $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{D}(\mathfrak{a}_1)\,\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_2)$ festsetzen. $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ ist dann eine homomorphe Abbildung der Divisorengruppe von K in die von K, und auch der Divisorengruppe nullten Grades von K in die von K. Dieser Homomorphismus liefert nun sogar einen Homomorphismus der Divisorenklassengruppe von K in die von K, und auch der Divisorenklassengruppe nullten Grades von K in die von K. Im klassischen Fall ist das eine unmittelbare Folge aus dem Abelschen Theorem für die Integrale erster Gattung, in unserer algebraischen Theorie ergibt es sich ganz einfach aus unserer Korrespondenzdefinition.

3. Im klassischen Fall ist die Wirkung einer Korrespondenz auf die Integrale erster Gattung von K eine *lineare Transformation* in die Integrale erster Gattung von K. Sei $\mathfrak{u}(\mathfrak{p})$ eine Basis der Integrale erster Gattung von K, als einspaltige Matrix gedacht, und entsprechend $\boldsymbol{u}(\mathfrak{P})$ eine Basis der Integrale erster Gattung von K. Zu einer Korrespondenz $\mathfrak{D}$ von K zu K gibt es dann eine konstante Matrix M und eine konstante Spalte t derart, daß die rechtsseitige Kongruenz

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{p})) \equiv \mathsf{M}\mathfrak{u}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t} \qquad \text{mod. } \mathsf{A}$$

nach der Periodenmatrix A von $\boldsymbol{u}$ gilt; dabei ist die linke Seite in üblicher Weise durch additive Zusammensetzung entsprechend der Primdivisorzerlegung von $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ erklärt. Die Matrix M liefert dabei eine *Multiplikation* der Periodenmatrix A von $\mathfrak{u}$ in die Periodenmatrix A von $\boldsymbol{u}$, d. h. eine Beziehung

$$\mathsf{M}A = \mathsf{A}G$$

mit einer ganzzahligen Matrix G.

Mittels des Abelschen und des Jacobischen Theorems beweist man leicht, daß der durch die Korrespondenz $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ gelieferte Homomorphismus der

$\left\{\begin{matrix}\text{vollen Klassengruppe}\\ \text{Klassengruppe nullten Grades}\end{matrix}\right\}$ von K in die von K einerseits und die ihr zugeordnete

$\left\{\begin{matrix}\text{lineare Transformation } (\mathsf{M}, \mathsf{t})\\ \text{Multiplikation } \mathsf{M}\end{matrix}\right\}$ andrerseits sich gegenseitig eindeutig bestimmen.

Alles dies wird im letzten Paragraphen genauer ausgeführt.

4. In der algebraischen Theorie zeigen wir, den letzten Tatsachen entsprechend, daß für eine Korrespondenz $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ der zugeordnete Homomorphismus der vollen Klassengruppe von K in die von K gegenseitig eindeutig der gewöhnlichen Klasse des Divisors $\mathfrak{D}$ entspricht, und der zugeordnete Homomorphismus der Klassengruppe nullten Grades von K in die von K der *gröberen Klasse* von $\mathfrak{D}$, wo in die Hauptklasse außer den Hauptdivisoren auch noch die konstanten (d. h. Divisoren von K/k entsprechenden) Divisoren von $K\mathsf{K}/K$ gerechnet werden. Hiernach sind diese gröberen Divisorenklassen von $K\mathsf{K}/K$ als algebraisches Äquivalent der Multiplikatoren M des klassischen Falles anzusehen. Der Addition der M entspricht dabei die Multiplikation der gröberen Divisorenklassen. Es ist daher zweckmäßig, die Zusammensetzung dieser gröberen Divisoren-

klassen additiv aufzufassen. Die gröbere Divisorenklassengruppe von $K\mathsf{K}/K$ wird so zum *Multiplikatorenmodul von K in* K. Die dementsprechende additive Zusammensetzung der Korrespondenzen findet sich bei Severi l. c., p. 217. Die Zugehörigkeit eines Divisors zur gröberen Hauptklasse bedeutet in der Ausdrucksweise der algebraischen Geometrie, daß er eine Korrespondenz von der Wertigkeit Null liefert. Die von Severi l. c., p. 235 entwickelte Theorie der Abhängigkeit von Korrespondenzen ist also das Äquivalent zu unserer Theorie des Multiplikatorenmoduls.

5. Sei jetzt K zu K isomorph und φ eine feste isomorphe Abbildung von K auf K. In diesem Falle kann man $\mathsf{A} = A$ wählen. Die Multiplikatoren M bilden dann einen Ring.

Das ist auch in der algebraischen Theorie einzusehen, indem man die Homomorphismen $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ der Divisorengruppe von K durch Anfügung der weiteren Abbildung $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})\,\varphi$ zu Automorphismen $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})\varphi$ macht (Severi l. c., p. 217). Bei unserer Auffassung ist noch ein (gedanklich ganz einfacher) Beweis dafür nötig, daß, wenn außer zwei (nicht notwendig isomorphen) Körpern K_1 und K_2 noch ein dritter Körper K_3 mit demselben Konstantenkörper k gegeben ist, die durch einen Divisor $\mathfrak{D}_{12}$ von K_1K_2/K_1 und einen Divisor $\mathfrak{D}_{23}$ von K_2K_3/K_2 gegebene Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}_{23}(\mathfrak{D}_{12}(\mathfrak{a}))$ der Divisoren $\mathfrak{a}$ von K_1 auf Divisoren von K_3 auch durch einen Divisor $\mathfrak{D}_{13}$ von K_1K_3/K_1 in der Form $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}_{13}(\mathfrak{a})$ erhalten werden kann, daß also $\mathfrak{D}_{23}(\mathfrak{D}_{12}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{D}_{13}(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a}$ gilt.

So entsteht dann in unserer algebraischen Theorie der *Multiplikatorenring von K in sich*, der im zweiten Teil dieser Arbeit auf seine Struktur hin genauer untersucht werden soll, insbesondere für den Fall eines Konstantenkörpers k von Primzahlcharakteristik.

§ 1. Vorbereitende Ausführungen.

Zur Erleichterung der Auffassung des Hauptteils der Arbeit stellen wir in diesem Paragraphen einige Tatsachen aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper zusammen, die nachher gebraucht werden. Soweit es sich um wohlbekannte Dinge handelt, lassen wir die Beweise fort.

1. Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem beliebigen Körper k als Konstantenkörper. Unter einer *Erzeugung* $(\xi;\ \eta_i)$ *von* K/k wollen wir stets einen Aufbau des Körpers K von k aus verstehen, der folgendermaßen zustande kommt: Es seien

ξ ein über k transzendentes Element aus K,
$k[\xi]$ der Integritätsbereich der Polynome in ξ über k,
K_ξ der Integritätsbereich der über $k[\xi]$ ganz-algebraischen Elemente aus K,
η_i $(i = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $\mathsf{K}_\xi/k[\xi]$,

(M) $\eta_i\eta_j = \sum_\nu g_{ij\nu}(\xi)\eta_\nu$ mit $g_{ij\nu}(\xi)$ in $k[\xi]$ ihr Multiplikationsschema.

Es ist dann also

$$\mathsf{K} = k(\xi;\ \eta_i),$$

die Elemente α aus K sind in eindeutiger Basisdarstellung durch

$$\alpha = \sum_i \frac{f_i(\xi)}{f(\xi)}\,\eta_i \text{ mit } f_i(\xi),\ f(\xi) \text{ in } k[\xi]$$

gegeben, und die algebraischen Relationen zwischen ihnen werden in geläufiger Weise vollständig durch das Multiplikationsschema (M) beschrieben.

Dies unterscheidet sich von dem üblichen Begriff einer Erzeugung dadurch, daß

an Stelle eines primitiven Elements η für $\mathsf{K}/k(\xi)$ mit der zugehörigen irreduziblen Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ eine Basis η_i des als kommutative Divisionsalgebra aufgefaßten Körpers $\mathsf{K}/k(\xi)$ nebst ihrem Multiplikationsschema (M) gegeben wird. Außerdem wird gleich die für die meisten Anwendungen gebrauchte Ganzheitseigenschaft der η_i mitgefordert.

2. Der Begriff eines *Primdivisors* $\mathfrak{p}$ von K/k kann auf zwei verschiedene Arten körperinvariant erklärt werden.

a) (*Arithmetischer Primdivisorbegriff.*) Ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K/k ist gegeben durch eine *diskrete Exponentenbewertung* von K, bei der k identisch bewertet ist. — Man übersieht alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k von der bekannten Übersicht über die Primdivisoren $\mathfrak{p}_0$ eines rationalen Teilkörpers $k(\xi)$ aus durch die Fortsetzungstheorie [Theorie der Primzerlegung von $\mathfrak{p}_0$ in der endlich-algebraischen Erweiterung $\mathsf{K}/k(\xi)$].

b) (*Jungscher Primdivisorbegriff.*) Ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K/k ist gegeben durch einen *Homomorphismus* von K auf eine endlich-algebraische Erweiterung k^* von k, bei der die Elemente aus k in sich übergehen. Dabei ist in k^* das Symbol ∞ aufgenommen gedacht; es soll in den Homomorphismus mit den üblichen Rechenregeln einbezogen sein. Die auf k^* selbst, nicht auf ∞, abgebildeten Elemente aus K bilden dann einen Integritätsbereich $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. Zwei solche Primdivisoren werden als gleich betrachtet, wenn sie sich nur um einen Isomorphismus von k^*/k unterscheiden; es kommt also nur auf den Typus k^*/k an und auf den Homomorphismus von K/k auf diesen Typus.

Beide Definitionen sind äquivalent: Jedem arithmetischen Primdivisor $\mathfrak{p}$ entspricht eindeutig der zugehörige Restklassenhomomorphismus mod. $\mathfrak{p}$ von K —— K wird dabei auf den Restklassenkörper k^* abgebildet, und $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ ist der Integritätsbereich der für $\mathfrak{p}$ ganzen Elemente von K; umgekehrt entspringt jeder Jungsche Primdivisor in dieser Weise aus einem eindeutig bestimmten arithmetischen Primdivisor.

Der Beweis dieser Umkehrung kann entweder durch eine körperinvariante Schlußweise geführt werden, oder auch leicht aus der folgenden für unsere Zwecke wichtigen nicht mehr körperinvarianten Tatsache entnommen werden:

Ist ξ ein über k transzendentes Element aus K, so entsprechen die nicht im Nenner von ξ aufgehenden arithmetischen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k umkehrbar eindeutig den Primidealen $\mathfrak{p}_\xi$ von K_ξ/k, indem $\mathfrak{p}_\xi$ die Menge der durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Elemente aus K_ξ ist.

Dabei ist unter einem Ideal von K_ξ/k ein derartiges Ideal von K_ξ zu verstehen, welches kein von Null verschiedenes Element aus k enthält.

Geht $\mathfrak{p}$ nicht im Nenner von ξ auf, so geht $\mathfrak{p}$ auch nicht in den Nennern der von ξ ganz-algebraisch abhängigen η_i auf, d. h. mit ξ sind auch die η_i ganz für $\mathfrak{p}$. Wir reden in diesem Falle von einer *$\mathfrak{p}$-ganzen Erzeugung* $(\xi; \eta_i)$ von K/k. Aus der arithmetischen Theorie folgt ferner, daß dann die η_i auch eine Basis von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}/k(\xi)_{\mathfrak{p}_0}$ sind. Damit ergibt sich die für das folgende wichtige Tatsache:

Hilfssatz 1. *Es sei $(\xi; \eta_i)$ mit* (M) *eine Erzeugung von K/k. Jedem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K/k, der nicht im Nenner von ξ aufgeht, entspricht eine über k algebraische Realisierung $(a; b_i)$ von* (M), *eindeutig bis auf algebraisch konjugierte über k, und umgekehrt, und zwar derart, daß beim Restklassenhomomorphismus mod. $\mathfrak{p}$ von K*

$$(\xi; \eta_i) \to (a; b_i)$$

gilt.

Es ist dann also

$$k^* = k(a; b_i)$$

der Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ von K *und insbesondere*

$$Grad\ \mathfrak{p} = [k^* : k].$$

Dieser Hilfssatz tritt als allgemeingültiges Äquivalent an die Stelle der in H II (§ 3, 1) benutzten nicht mehr allgemeingültigen Kennzeichnung der Primdivisoren durch über k algebraische Lösungen (a, b) einer Grundgleichung $f(\xi, \eta) = 0$.

3. Sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem vollkommenen Konstantenkörper k von Primzahlcharakteristik.

Hilfssatz 2. *Ist L eine endlich-algebraische Erweiterung von K vom Inseparabilitätsgrad q, so ist*

L/L^q rein-inseparabel vom Grad q, L^q/K separabel;

$L/K^{q^{-1}}$ separabel, $K^{q^{-1}}/K$ rein-inseparabel vom Grad q.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Inseparabilitätsgrades und einer Bemerkung von F. K. Schmidt [2]).

Sei weiter K^* ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k, und K_1, K_2 zwei in K^* enthaltene algebraische Funktionenkörper über k mit K^* als Kompositum:

$$K^* = K_1 K_2.$$

Mit S_1, S_2, N_1, N_2 seien Spur und Norm von K^* nach K_1, K_2 bezeichnet.

Hilfssatz 3. *Das kleinste in K_2 gelegene Multiplum eines (als Divisor von K^* aufgefaßten) Primdivisors $\mathfrak{p}_1$ von K_1 ist gleich $N_2(\mathfrak{p}_1)$, und entsprechend das kleinste in K_1 gelegene Multiplum eines Primdivisors $\mathfrak{p}_2$ von K_2 gleich $N_1(\mathfrak{p}_2)$, wenn von endlich vielen Ausnahmeprimdivisoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ abgesehen wird.*

Aus einer Kongruenz

$$z_2 \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}_1 \text{ mit } z_2 \text{ in } K_2 \quad | \quad z_1 \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}_2 \text{ mit } z_1 \text{ in } K_1$$

folgt also dann

$$z_2 \equiv 0 \bmod. N_2(\mathfrak{p}_1) \quad | \quad z_1 \equiv 0 \bmod. N_1(\mathfrak{p}_2).$$

Beweis. K^* kann nicht sowohl über K_1 als auch über K_2 inseparabel sein. Denn sonst umfaßte nach Hilfssatz 2 K^{*p} sowohl K_1 als K_2, es wäre also $K_1 K_2 \leqq K^{*p} < K^*$. Wir

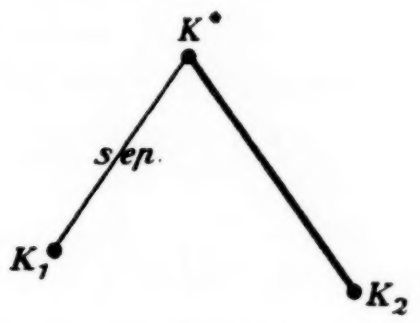

Fig. 1.

können daher ohne Einschränkung annehmen, daß etwa K^*/K_1 separabel ist (siehe Fig. 1); dann müssen wir natürlich jede der beiden Aussagen des Hilfssatzes besonders beweisen.

Sei dazu w_i eine in K_2 gelegene Basis für K^*/K_1. Ihre Diskriminante

$$D_1 = |S_1(w_i w_j)|$$

---

[2]) Siehe dazu H. Hasse, Über die Kongruenzzetafunktionen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1934, Satz 1.

ist ein von Null verschiedenes Element von K_1; sei $\mathfrak{d}_1$ ihr Zählerdivisor. Ferner sei $\mathfrak{n}_2$ der Hauptnenner der w_i.

Wir werden den Hilfssatz für die zu $\mathfrak{d}_1$ und $N_1(\mathfrak{n}_2)$ primen Primdivisoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ beweisen.

Zunächst zeigen wir:

Es sei $\mathfrak{p}^*$ ein Primdivisor von K^*, und es seien $\mathfrak{p}_1 = N_1(\mathfrak{p}^*)$ und $\mathfrak{p}_2 = N_2(\mathfrak{p}^*)$ die durch $\mathfrak{p}^*$ teilbaren Primdivisoren von K_1 und K_2. Geht $\mathfrak{p}_1$ nicht in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ nicht in $\mathfrak{n}_2$ auf, so gilt

$$\mathfrak{p}^* = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)\,.$$

Sei dazu

$$z = \sum_j a_j w_j \qquad (a_j \text{ in } K_1)$$

ein $\mathfrak{p}^*$-ganzes Element aus K^* in seiner Darstellung durch die Basis w_i. Da die w_i nach Voraussetzung $\mathfrak{p}_2$-ganz, also $\mathfrak{p}^*$-ganz sind, so sind auch die zw_i und $w_i w_j$ $\mathfrak{p}^*$-ganz. Daher sind die $S_1(zw_i)$ und $S_1(w_i w_j)$ $\mathfrak{p}_1$-ganz. Durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$S_1(zw_i) = \sum_j a_j S_1(w_i w_j)$$

mit der Determinante D_1 folgt dann, daß die $D_1 a_i$ $\mathfrak{p}_1$-ganz sind. Da aber der Zähler $\mathfrak{d}_1$ von D_1 nach Voraussetzung prim zu $\mathfrak{p}_1$ ist, ergeben sich schließlich die a_i selbst als $\mathfrak{p}_1$-ganz.

Hieraus folgt zunächst, daß jedes $\mathfrak{p}^*$-ganze Element z aus K von selbst auch $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$-ganz ist, d. h. daß $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ höchstens eine Potenz von $\mathfrak{p}^*$ ist. Diese Potenz ist ferner die erste; denn die Reste mod. $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ der z ergeben sich aus obiger Basisdarstellung als Elemente aus k, weil dies für die Reste der a_j mod. $\mathfrak{p}_1$ und der w_j mod. $\mathfrak{p}_2$ der Fall ist.

Zum Beweis der ersten Aussage des Hilfssatzes 3 sei $\mathfrak{p}_1$ prim zu $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ vorausgesetzt; dann ist insbesondere bekanntlich $\mathfrak{p}_1$ in K^* unverzweigt. Sei dementsprechend

$$\mathfrak{p}_1 = \prod_\nu \mathfrak{p}_\nu^*$$

die Primzerlegung von $\mathfrak{p}_1$ in K^*. Auf Grund der Voraussetzung geht keines der zugeordneten $\mathfrak{p}_{2\nu} = N_2(\mathfrak{p}_\nu^*)$ in $\mathfrak{n}_2$ auf. Nach dem Gezeigten ist also $\mathfrak{p}_\nu^* = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{2\nu})$, d. h. die $\mathfrak{p}_{2\nu}$ sind untereinander verschieden. Daher ergibt sich als kleinstes in K_2 gelegenes Multiplum von $\mathfrak{p}_1$ in der Tat

$$\prod_\nu \mathfrak{p}_{2\nu} = N_2(\mathfrak{p}_1)\,.$$

Zum Beweis der zweiten Aussage des Hilfssatzes 3 sei $\mathfrak{p}_2$ prim zu $\mathfrak{d}_1$ und $N_1(\mathfrak{n}_2)$ vorausgesetzt. Sei

$$\mathfrak{p}_2 = \prod_\nu \mathfrak{p}_\nu^{*e_\nu}$$

die Primzerlegung von $\mathfrak{p}_2$ in K^*. Auf Grund der Voraussetzung geht keines der zugeordneten $\mathfrak{p}_{1\nu} = N_1(\mathfrak{p}_\nu^*)$ in $\mathfrak{d}_1$ auf. Nach dem Gezeigten ist also wieder $\mathfrak{p}_\nu^* = (\mathfrak{p}_{1\nu}, \mathfrak{p}_2)$, d. h. die $\mathfrak{p}_{1\nu}$ sind untereinander verschieden. Da zudem nach der Voraussetzung kein $\mathfrak{p}_\nu^*$ in $N_1(\mathfrak{n}_2)$ aufgeht, so sind die $\mathfrak{p}_{1\nu}$ auch prim zu $\mathfrak{n}_2$ und somit in K^* unverzweigt. Damit ergibt sich als kleinstes in K_1 gelegenes Multiplum von $\mathfrak{p}_2$ in der Tat

$$\prod_\nu \mathfrak{p}_{1\nu}^{e_\nu} = N_1(\mathfrak{p}_2)\,.$$

4. Sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem beliebigen Konstantenkörper k. Ist ξ ein über k transzendentes Element von K, so ent-

sprechen sich allgemeiner auch die sämtlichen zum Nenner von ξ primen Divisoren ∂ von K und die sämtlichen Ideale ∂_ξ von K_ξ/k gegenseitig eindeutig und multiplikativ isomorph, nämlich derart, daß ∂_ξ die Menge derjenigen Elemente von K ist, die für alle nicht im Nenner von ξ aufgehenden Primdivisoren von K mindestens dieselbe Ordnungszahl wie ∂ haben. Wir nennen ∂_ξ kurz *das ∂ zugeordnete K_ξ-Ideal.*

Ist ∂ nicht prim zum Nenner von ξ, so erklären wir ∂_ξ eindeutig vermittels des zu diesem Nenner primen Bestandteils von ∂; natürlich ist dann nicht mehr auch umgekehrt ∂ durch ∂_ξ eindeutig bestimmt.

Es ist für uns wichtig, die Hauptdivisoreigenschaft von ∂ auf die Hauptidealeigenschaft eines geeigneten zugeordneten ∂_ξ zurückzuführen. Dazu wählen wir ξ so, daß sein Nenner nur einen einzigen Primdivisor $\wp_\infty$ enthält, was nach dem Riemannschen Teil des Riemann-Rochschen Satzes sicher möglich ist, sogar bei beliebig vorgeschriebenem $\wp_\infty$. Wir beweisen dann:

Hilfssatz 4. *Geht im Nenner von ξ nur ein einziger Primdivisor $\wp_\infty$ auf, so ist ein Divisor nullten Grades ∂ dann und nur dann Hauptdivisor, wenn das zugeordnete K_ξ-Ideal ∂_ξ Hauptideal ist.*

Beweis. Ist $\partial \cong \delta$ Hauptdivisor, so ist ersichtlich $\partial_\xi = \delta\mathsf{K}_\xi$ Hauptideal.

Ist umgekehrt $\partial_\xi = \delta\mathsf{K}_\xi$ Hauptideal, so unterscheidet sich der Divisor des Elementes δ vom Divisor ∂ höchstens um eine Potenz von $\wp_\infty$. Da aber ∂ nach Voraussetzung denselben Grad Null wie δ hat, ist diese Potenz notwendig dieselbe, also in der Tat $\partial \cong \delta$ Hauptdivisor.

§ 2. Korrespondenzen.

1. K und K seien zwei algebraische Funktionenkörper einer Unbestimmten über demselben Konstantenkörper k. Wir bilden die

Konstantenerweiterung $\mathfrak{R}/K$ von K/k.

$\mathfrak{R}/K$ besitzt zwei Arten von Primdivisoren:

a) *Konstante Primdivisoren* $\mathfrak{P}$. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß der zugehörige Restklassenhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ auch den Teilkörper K homomorph, nicht isomorph abbildet.

b) *Nicht-konstante Primdivisoren* $\mathfrak{P}$. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß der zugehörige Restklassenhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ den Teilkörper K isomorph abbildet.

Satz 1. *Die konstanten Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/K$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\wp$ von K/k derart, daß der Restklassenhomomorphismus mod. $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ den Restklassenhomomorphismus mod. $\wp$ von K induziert.*

Der Restklassenkörper K^* von $\mathfrak{P}$ ergibt sich dabei aus dem Restklassenkörper k^* von $\wp$ als die Konstantenerweiterung

$$K^* = Kk^*.$$

Insbesondere ist also (falls K/k separabel erzeugbar oder k^*/k separabel ist)

$$Grad\ \mathfrak{P} = Grad\ \wp.$$

Allgemein ist jedenfalls Grad $\mathfrak{P} \leqq$ Grad $\wp$.

Satz 2 (siehe Fig. 2). *Die nicht-konstanten Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/K$ entsprechen umkehrbar eindeutig den nicht-konjugierten Isomorphismen von K/k auf Teilkörper K_0^*/k endlich-algebraischer Erweiterungen K^* von K derart, daß der Restklassenhomomorphismus*

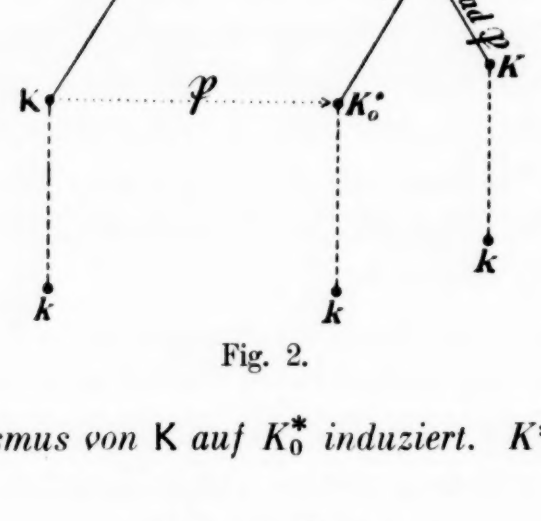

Fig. 2.

mod. $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{R}$ *den Isomorphismus von* K *auf* K_0^* *induziert.* K^* *kann dabei sogleich als das Kompositum*

$$K^* = K_0^* K$$

angenommen werden und ist dann der Restklassenkörper von $\mathfrak{P}$. *Insbesondere ist also*

$$Grad\ \mathfrak{P} = [K^* : K].$$

In diesem Satz sind zwei Isomorphismen von K/k auf Teilkörper K_0^*/k, $\bar{K}_0^*/k$ endlich-algebraischer Erweiterungen K^*, $\bar{K}^*$ von K konjugiert zu nennen, wenn sie durch einen Isomorphismus von K^*/K auf $\bar{K}^*/K$ zusammenhängen.

Beweis der Sätze 1 *und* 2. Daß man von einem Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/K$ ausgehend in der angegebenen Weise einen Primdivisor $\wp$ von K/k bzw. einen Isomorphismus von K/k auf einen Teilkörper K_0^*/k des über K endlich-algebraischen Restklassenkörpers K^* erhält, folgt unmittelbar aus den Definitionen a) bzw. b). Auch die angeschlossenen Behauptungen ergeben sich dabei sofort.

Für den Beweis der Umkehrungen wähle man eine Erzeugung $(\xi; \eta_i)$ mit (M) von K/k, und zwar $\wp$-ganz im Falle des Satzes 1, beliebig im Falle des Satzes 2. Sie ist auch eine Erzeugung von $\mathfrak{R}/K$. Dem Primdivisor $\wp$ bzw. dem vorausgesetzten Isomorphismus von K/k entspricht eine über k bzw. K algebraische Realisierung von (M), die auch im ersten Falle als solche über K angesehen werden kann, und damit nach Hilfssatz 1 ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/K$, von dem man sofort sieht, daß ihm rückwärts der Ausgangsprimdivisor $\wp$ bzw. der Ausgangsisomorphismus von K/k in der angegebenen Weise entspricht. Nach Hilfssatz 1 ist ferner dann und nur dann $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}$, wenn die zugehörigen Realisierungen von (M) algebraisch konjugiert über k bzw. K sind, wenn also im ersten Falle $\bar{\wp} = \wp$, im zweiten Falle die zugehörigen Isomorphismen von K konjugiert im definierten Sinne sind.

2. Von jetzt ab setzen wir durchweg voraus, daß k *algebraisch abgeschlossen* ist, so daß also die Primdivisoren von K/k und K/k sämtlich den Grad 1 haben; dann haben auch die konstanten Primdivisoren von $\mathfrak{R}/K$ sämtlich den Grad 1.

Wir können $\mathfrak{R}$ auch als Funktionenkörper einer Unbestimmten über dem Konstantenkörper K auffassen. Von den Primdivisoren von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ brauchen wir aber nur die konstanten, die gemäß Satz 1 den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k umkehrbar eindeutig entsprechen. Wir bezeichnen den $\mathfrak{p}$ entsprechenden konstanten Primdivisor von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ vorerst mit dem besonderen Zeichen $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Diese Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ haben eine Bedeutung auch für $\mathfrak{R}/K$. Es gilt nämlich der folgende Satz, der andererseits die bisher nur im Jungschen Sinne betrachteten konstanten Primdivisoren auch im arithmetischen Sinne beleuchtet:

Satz 3. *Die genaue Potenz $\mathfrak{P}^\alpha$, die in einem Element A von $\mathfrak{R}$ steckt, bestimmt sich folgendermaßen: Es sei $(\xi; \eta_i)$ eine Erzeugung von K/k und*

$$A = \sum_i \frac{F_i(\xi)}{F(\xi)} \eta_i, \quad F_i(\xi), F(\xi) \text{ in } K[\xi]$$

die zugehörige Basisdarstellung von A. Dann ist $\mathfrak{p}^\alpha$ der größte gemeinsame $\mathfrak{p}$-Teiler der Koeffizienten $\frac{F_i(\xi)}{F(\xi)}$ als ξ-Funktionale über K, d. h. der Quotient aus dem größten gemeinsamen $\mathfrak{p}$-Teiler der Koeffizienten aller $F_i(\xi)$ durch den größten gemeinsamen $\mathfrak{p}$-Teiler der Koeffizienten von $F(\xi)$.

Beweis. Durch Herausziehen des größten gemeinsamen $\mathfrak{p}$-Teilers $\mathfrak{p}^\alpha$ in Form der entsprechenden Potenz P^α eines Primelements P zu $\mathfrak{p}$ reduziert sich die Behauptung auf den Nachweis der folgenden Tatsache:

Sind $F(\xi)$ und das System der $F_i(\xi)$ $\mathfrak{p}$-primitiv, so ist A prim zu $\mathfrak{P}$.

Man beachte für diese Reduktion die Äquivalenz des Jungschen und arithmetischen Primdivisorbegriffs.

Angenommen nun, $F(\xi)$ bzw. $\sum_i F_i(\xi)\eta_i$ seien nicht prim zu $\mathfrak{P}$. Da ξ und die η_i als Elemente aus K ganz für $\mathfrak{P}$ sind, sind $F(\xi)$ bzw. $\sum_i F_i(\xi)\eta_i$ jedenfalls ganz für $\mathfrak{P}$. Es wäre also

$$F(\xi) \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_i F_i(\xi)\eta_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}.$$

Ersetzen wir in diesen Kongruenzen die in K gelegenen Koeffizienten der Polynome $F(\xi), F_i(\xi)$ durch ihre in k gelegenen Reste mod. $\mathfrak{p}$ — die so entstehenden Polynome seien mit $f(\xi)$, $f_i(\xi)$ bezeichnet, so entstehen Kongruenzen mod. $\mathfrak{P}$ zwischen Elementen aus K. Da aber die von Null verschiedenen Elemente von K Einheiten für $\mathfrak{P}$ sind, so sind diese Kongruenzen in Wahrheit Gleichungen:

$$f(\xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_i f_i(\xi)\eta_i = 0.$$

Es ergäbe sich also, daß alle Koeffizienten von $F(\xi)$ bzw. alle Koeffizienten der $F_i(\xi)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar wären, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Primitivität von $F(\xi)$ bzw. des Systems der $F_i(\xi)$.

Auf Grund von Satz 3 nennen wir die konstanten Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ auch Funktionalprimdivisoren von $\mathfrak{R}/K$ und bezeichnen sie von jetzt ab mit dem gleichen Buchstaben $\mathfrak{p}$ wie die zugeordneten Primdivisoren von K/k. Wir verabreden ferner, daß der Übergang von einem mit großem lateinischen Buchstaben bezeichneten $\mathfrak{p}$-ganzen Polynom $F(\xi)$ über K zu dem mod. $\mathfrak{p}$ kongruenten Polynom $f(\xi)$ über k stets stillschweigend durch Verwendung des entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wird.

3. Wir stellen noch einige Begriffe und Tatsachen voran, die sich auf den Übergang zu den Resten nach einem Funktionalprimdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}/K$ in einem Ideal $\mathfrak{A}_\xi$ von $\mathfrak{R}_\xi/k$ beziehen.

Sei A_i eine $K[\xi]$-Basis von $\mathfrak{A}_\xi$ und

$$A_i = \sum_j \frac{G_{ij}(\xi)}{G(\xi)} \eta_j, \quad G_{ij}(\xi), \quad G(\xi) \text{ in } K[\xi]$$

ihre Darstellung durch eine $k[\xi]$-Basis η_i von K_ξ. Dabei können wir den gemeinsamen

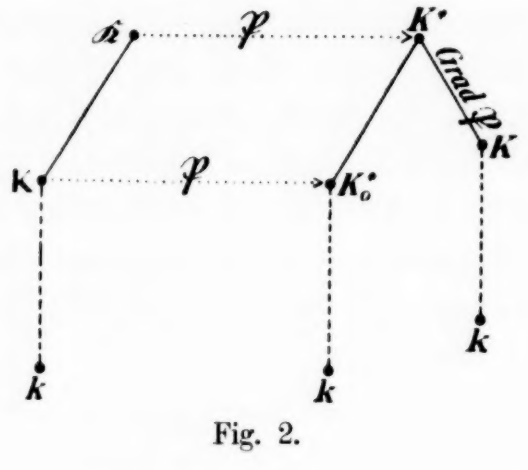

Fig. 2.

mod. $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{R}$ *den Isomorphismus von* K *auf* K_0^* *induziert.* K^* *kann dabei sogleich als das Kompositum*

$$K^* = K_0^* K$$

angenommen werden und ist dann der Restklassenkörper von $\mathfrak{P}$. *Insbesondere ist also*

$$Grad\ \mathfrak{P} = [K^* : K].$$

In diesem Satz sind zwei Isomorphismen von K/k auf Teilkörper K_0^*/k, $\bar{K}_0^*/k$ endlich-algebraischer Erweiterungen K^*, $\bar{K}^*$ von K konjugiert zu nennen, wenn sie durch einen Isomorphismus von K^*/K auf $\bar{K}^*/K$ zusammenhängen.

Beweis der Sätze 1 *und* 2. Daß man von einem Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/K$ ausgehend in der angegebenen Weise einen Primdivisor $\wp$ von K/k bzw. einen Isomorphismus von K/k auf einen Teilkörper K_0^*/k des über K endlich-algebraischen Restklassenkörpers K^* erhält, folgt unmittelbar aus den Definitionen a) bzw. b). Auch die angeschlossenen Behauptungen ergeben sich dabei sofort.

Für den Beweis der Umkehrungen wähle man eine Erzeugung $(\xi; \eta_i)$ mit (M) von K/k, und zwar $\wp$-ganz im Falle des Satzes 1, beliebig im Falle des Satzes 2. Sie ist auch eine Erzeugung von $\mathfrak{R}/K$. Dem Primdivisor $\wp$ bzw. dem vorausgesetzten Isomorphismus von K/k entspricht eine über k bzw. K algebraische Realisierung von (M), die auch im ersten Falle als solche über K angesehen werden kann, und damit nach Hilfssatz 1 ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/K$, von dem man sofort sieht, daß ihm rückwärts der Ausgangsprimdivisor $\wp$ bzw. der Ausgangsisomorphismus von K/k in der angegebenen Weise entspricht. Nach Hilfssatz 1 ist ferner dann und nur dann $\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}$, wenn die zugehörigen Realisierungen von (M) algebraisch konjugiert über k bzw. K sind, wenn also im ersten Falle $\bar{\wp} = \wp$, im zweiten Falle die zugehörigen Isomorphismen von K konjugiert im definierten Sinne sind.

2. Von jetzt ab setzen wir durchweg voraus, daß k *algebraisch abgeschlossen* ist, so daß also die Primdivisoren von K/k und K/k sämtlich den Grad 1 haben; dann haben auch die konstanten Primdivisoren von $\mathfrak{R}/K$ sämtlich den Grad 1.

Wir können $\mathfrak{R}$ auch als Funktionenkörper einer Unbestimmten über dem Konstantenkörper K auffassen. Von den Primdivisoren von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ brauchen wir aber nur die konstanten, die gemäß Satz 1 den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k umkehrbar eindeutig entsprechen. Wir bezeichnen den $\mathfrak{p}$ entsprechenden konstanten Primdivisor von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ vorerst mit dem besonderen Zeichen $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Diese Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ haben eine Bedeutung auch für $\mathfrak{R}/K$. Es gilt nämlich der folgende Satz, der andererseits die bisher nur im Jungschen Sinne betrachteten konstanten Primdivisoren auch im arithmetischen Sinne beleuchtet:

Satz 3. *Die genaue Potenz $\mathfrak{P}^\alpha$, die in einem Element A von $\mathfrak{R}$ steckt, bestimmt sich folgendermaßen: Es sei $(\xi; \eta_i)$ eine Erzeugung von K/k und*

$$A = \sum_i \frac{F_i(\xi)}{F(\xi)} \eta_i, \quad F_i(\xi), F(\xi) \text{ in } K[\xi]$$

die zugehörige Basisdarstellung von A. Dann ist $\mathfrak{p}^\alpha$ der größte gemeinsame $\mathfrak{p}$-Teiler der Koeffizienten $\frac{F_i(\xi)}{F(\xi)}$ als ξ-Funktionale über K, d. h. der Quotient aus dem größten gemeinsamen $\mathfrak{p}$-Teiler der Koeffizienten aller $F_i(\xi)$ durch den größten gemeinsamen $\mathfrak{p}$-Teiler der Koeffizienten von $F(\xi)$.

Beweis. Durch Herausziehen des größten gemeinsamen $\mathfrak{p}$-Teilers $\mathfrak{p}^\alpha$ in Form der entsprechenden Potenz P^α eines Primelements P zu $\mathfrak{p}$ reduziert sich die Behauptung auf den Nachweis der folgenden Tatsache:

Sind $F(\xi)$ und das System der $F_i(\xi)$ $\mathfrak{p}$-primitiv, so ist A prim zu $\mathfrak{P}$.

Man beachte für diese Reduktion die Äquivalenz des Jungschen und arithmetischen Primdivisorbegriffs.

Angenommen nun, $F(\xi)$ bzw. $\sum_i F_i(\xi)\eta_i$ seien nicht prim zu $\mathfrak{P}$. Da ξ und die η_i als Elemente aus K ganz für $\mathfrak{P}$ sind, sind $F(\xi)$ bzw. $\sum_i F_i(\xi)\eta_i$ jedenfalls ganz für $\mathfrak{P}$. Es wäre also

$$F(\xi) \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_i F_i(\xi)\eta_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}.$$

Ersetzen wir in diesen Kongruenzen die in K gelegenen Koeffizienten der Polynome $F(\xi), F_i(\xi)$ durch ihre in k gelegenen Reste mod. $\mathfrak{p}$ — die so entstehenden Polynome seien mit $f(\xi)$, $f_i(\xi)$ bezeichnet, so entstehen Kongruenzen mod. $\mathfrak{P}$ zwischen Elementen aus K. Da aber die von Null verschiedenen Elemente von K Einheiten für $\mathfrak{P}$ sind, so sind diese Kongruenzen in Wahrheit Gleichungen:

$$f(\xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_i f_i(\xi)\eta_i = 0.$$

Es ergäbe sich also, daß alle Koeffizienten von $F(\xi)$ bzw. alle Koeffizienten der $F_i(\xi)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar wären, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Primitivität von $F(\xi)$ bzw. des Systems der $F_i(\xi)$.

Auf Grund von Satz 3 nennen wir die konstanten Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}/\mathsf{K}$ auch Funktionalprimdivisoren von $\mathfrak{R}/K$ und bezeichnen sie von jetzt ab mit dem gleichen Buchstaben $\mathfrak{p}$ wie die zugeordneten Primdivisoren von K/k. Wir verabreden ferner, daß der Übergang von einem mit großem lateinischen Buchstaben bezeichneten $\mathfrak{p}$-ganzen Polynom $F(\xi)$ über K zu dem mod. $\mathfrak{p}$ kongruenten Polynom $f(\xi)$ über k stets stillschweigend durch Verwendung des entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wird.

3. Wir stellen noch einige Begriffe und Tatsachen voran, die sich auf den Übergang zu den Resten nach einem Funktionalprimdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}/K$ in einem Ideal $\mathfrak{A}_\xi$ von $\mathfrak{R}_\xi/k$ beziehen.

Sei A_i eine $K[\xi]$-Basis von $\mathfrak{A}_\xi$ und

$$A_i = \sum_j \frac{G_{ij}(\xi)}{G(\xi)} \eta_j, \quad G_{ij}(\xi), \quad G(\xi) \text{ in } K[\xi]$$

ihre Darstellung durch eine $k[\xi]$-Basis η_i von K_ξ. Dabei können wir den gemeinsamen

Nenner $G(\xi)$ $\mathfrak{p}$-primitiv normiert voraussetzen. Wir wollen die Basis A_i $\mathfrak{p}$-*regulär* nennen, wenn dann

1. die $G_{ij}(\xi)$ $\mathfrak{p}$-ganz sind,

2. die Polynome $|G_{ij}(\xi)|$ und $G(\xi)$ zu $\mathfrak{p}$ prime höchste Koeffizienten haben.

Und wir wollen das Ideal $\mathfrak{A}_\xi$ *fremd zu* $\mathfrak{p}$ nennen, wenn es eine $\mathfrak{p}$-reguläre $K[\xi]$-Basis A_i besitzt.

Diese Definitionen hängen, wie leicht zu sehen, nur von ξ, $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{p}$, nicht von der gewählten Basis η_i ab; doch kommt es darauf für uns nicht an. Wesentlich ist nur die ohne weiteres ersichtliche Tatsache:

Bei gegebenem ξ und $\mathfrak{A}_\xi$ ist jede Basis A_i regulär für fast alle $\mathfrak{p}$, und $\mathfrak{A}_\xi$ fremd zu fast allen $\mathfrak{p}$.

Zum Verständnis der Definitionen sei noch bemerkt: Bei gegebenem $\mathfrak{p}$ kann man die in den A_i steckenden Potenzen von $\mathfrak{p}$ in Form der entsprechenden Potenzen eines Primelements P zu $\mathfrak{p}$ aus K abspalten — P ist ja als von Null verschiedenes Element aus K eine Einheit in $\mathfrak{R}_\xi$ — und erhält dann eine $K[\xi]$-Basis von $\mathfrak{A}_\xi$ aus zu $\mathfrak{p}$ primen Elementen. Für sie ist nach Satz 3 die obige Bedingung 1. erfüllt; es sind sogar genauer die den einzelnen A_i entsprechenden Systeme $G_{ij}(\xi)$ $\mathfrak{p}$-primitiv. Es bleibt dann also nur die Bedingung 2. für die $\mathfrak{p}$-Regularität. Umgekehrt sind die Elemente einer $\mathfrak{p}$-regulären Basis sicher prim zu $\mathfrak{p}$.

Die Bedeutung der $\mathfrak{p}$-Regularität einer Basis A_i liegt zunächst in der Tatsache, daß dann die $\mathfrak{p}$-*ganzen* Elemente A aus $\mathfrak{A}_\xi$ genau durch

$$A = \sum_i F_i(\xi)\, A_i \text{ mit } \mathfrak{p}\text{-ganzen } F_i(\xi) \text{ aus } K[\xi]$$

gegeben sind. Denn einerseits sind diese A ersichtlich $\mathfrak{p}$-ganz. Andererseits kann unter Beachtung von $G(\xi)\,\mathfrak{A}_\xi \leqq \mathfrak{R}_\xi$ jedes A aus $\mathfrak{A}_\xi$ in der Form

$$A = \sum_j \frac{H_j(\xi)}{G(\xi)}\,\eta_j, \qquad H_j(\xi) \text{ in } K[\xi]$$

dargestellt werden. Ist A $\mathfrak{p}$-ganz, so sind nach Satz 3, und weil $G(\xi)$ $\mathfrak{p}$-primitiv ist, die $H_j(\xi)$ $\mathfrak{p}$-ganz. Aus ihnen berechnen sich die $F_i(\xi)$ durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_i F_i(\xi)\, G_{ij}(\xi) = H_j(\xi)$$

mit der Determinante $|G_{ij}(\xi)|$. Da diese Determinante $\mathfrak{p}$-ganz und mit Rücksicht auf ihren zu $\mathfrak{p}$ primen höchsten Koeffizienten sicher $\mathfrak{p}$-primitiv ist, ergeben sich die Polynome $F_i(\xi)$ in der Tat als $\mathfrak{p}$-ganz.

Wir bilden jetzt die Reste mod. $\mathfrak{p}$ in K der $\mathfrak{p}$-ganzen Elemente aus $\mathfrak{A}_\xi$. Sie sind nach dem Gezeigten genau durch

$$\alpha = \sum_i f_i(\xi)\alpha_i, \qquad f_i(\xi) \text{ in } k[\xi],$$

gegeben, wo die α_i die Reste mod. $\mathfrak{p}$ in K der A_i sind:

$$A_i \equiv \alpha_i \bmod \mathfrak{p}, \qquad \alpha_i \text{ in } \mathsf{K}.$$

Sie bilden also jedenfalls einen $k[\xi]$-Modul. Dieser ist aber sogar ein K_ξ-Ideal, weil ja die Elemente aus K_ξ sämtlich $\mathfrak{p}$-ganz und ihre eigenen Reste mod. $\mathfrak{p}$ in K sind. Da ein K_ξ-Ideal als $k[\xi]$-Modul notwendig den Höchstrang $n = [\mathsf{K}: k(\xi)]$ hat, bilden die α_i eine Basis. Wir wollen das gewonnene K_ξ-Ideal mit $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$ bezeichnen und das $\mathfrak{p}$-*Restideal* von $\mathfrak{A}_\xi$ nennen. Wir haben dann also:

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{A}_\xi$ ein zu $\mathfrak{p}$ fremdes $\mathfrak{R}_\xi$-Ideal, so erhält man durch Übergang zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ in K aus einer $\mathfrak{p}$-regulären $K[\xi]$-Basis A_i von $\mathfrak{A}_\xi$ eine $k[\xi]$-Basis α_i des $\mathfrak{p}$-Restideals $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$.*

Dabei haben wir die $\mathfrak{p}$-Regularität noch nicht voll ausgenutzt. Das geschieht aber in dem weiteren

Hilfssatz 6. *Ist $\mathfrak{A}_\xi$ ein zu $\mathfrak{p}$ fremdes $\mathfrak{R}_\xi$-Ideal, so hat das $\mathfrak{p}$-Restideal $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$ denselben Grad wie $\mathfrak{A}_\xi$.*

Beweis. Der Grad von $\mathfrak{A}_\xi$ stellt sich bekanntlich als die Differenz von Zähler- und Nennergrad in ξ der Determinante der Übergangssubstitution

$$A_i = \sum_j \frac{G_{ij}(\xi)}{G(\xi)}\,\eta_j$$

dar, also als Differenz der Grade von $\mid G_{ij}(\xi) \mid$ und $G(\xi)^n$. Geht man in der Übergangssubstitution zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ in K über:

$$\alpha_i = \sum_j \frac{g_{ij}(\xi)}{g(\xi)}\,\eta_j,$$

so erhält man nach Hilfssatz 5 die Übergangssubstitution für das $\mathfrak{p}$-Restideal $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$. Auf Grund der $\mathfrak{p}$-Regularität der Basis A_i hat aber die zugehörige Übergangsdeterminante dieselbe Graddifferenz. Daher hat in der Tat $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$ denselben Grad.

Aus Hilfssatz 6 ergeben sich weiter die folgenden beiden Hilfssätze:

Hilfssatz 7. *Sind $\mathfrak{A}_\xi, \mathfrak{B}_\xi, \mathfrak{A}_\xi\mathfrak{B}_\xi$ zu $\mathfrak{p}$ fremd, so gilt*

$$\mathfrak{A}_\xi\mathfrak{B}_\xi \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\xi \mid \mathfrak{p}.$$

Beweis. Aus der Definition des $\mathfrak{p}$-Restideals folgt jedenfalls

$$\mathfrak{A}_\xi\mathfrak{B}_\xi \mid \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\xi \mid \mathfrak{p}.$$

Für zu $\mathfrak{p}$ fremde $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi$, $\mathfrak{A}_\xi\mathfrak{B}_\xi$ haben hier die Ideale links und rechts denselben Grad, also muß das Gleichheitszeichen gelten.

Hilfssatz 8. *Ist A_i eine $\mathfrak{p}$-reguläre Normalbasis*[3]) *von $\mathfrak{A}_\xi$, so entsteht durch Bildung der Reste* mod. $\mathfrak{p}$ *in K eine Normalbasis α_i von $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$.*

Beweis. Es seien ε_i die Exponenten der A_i, d. h. die größten ganzen Zahlen, für die $A_i\xi^{e_i}$ noch ganz in bezug auf den Nenner von ξ ist. Für eine beliebige Basis gilt dann

$$\sum_i \varepsilon_i \leqq -\ \text{Grad}\ \mathfrak{A}_\xi - \tfrac{1}{2}\,d_\xi,$$

wo d_ξ der Grad der Diskriminante von $\mathfrak{R}_\xi/K[\xi]$ ist, und eine Normalbasis ist dadurch charakterisiert, daß in dieser Beziehung das Gleichheitszeichen gilt. Beim Übergang zu $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$ können sich nun die Exponenten ε_i ihrer Definition nach höchstens vergrößern, während die rechte Seite nach Hilfssatz 6 ungeändert bleibt; man beachte, daß d_ξ bei der von $\mathsf{K}/k[\xi]$ zu $\mathfrak{R}/K[\xi]$ führenden Konstantenerweiterung ungeändert bleibt. Gilt also für $\mathfrak{A}_\xi$ das Gleichheitszeichen, so gilt es notwendig auch für $\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$.

4. Wir kommen nunmehr zu unserer *Definition der Korrespondenzen.* $\mathfrak{D}$ sei ein Divisor von $\mathfrak{R}/K$. Wir definieren eine Funktion $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ der Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/k, deren Werte Divisoren von K/k sind, folgendermaßen:

---

[3]) Siehe dazu F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **33** (1931), insbesondere Satz 8.

a) $\mathfrak{P}$ sei ein konstanter Primdivisor von $\mathfrak{R}/K$ und $\wp$ der ihm eindeutig entsprechende Primdivisor von K/k. Für einen Divisor $\mathfrak{a}$ von K/k setzen wir:

$$\boxed{\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = \wp^f, \quad \text{wenn Grad } \mathfrak{a} = f.}$$

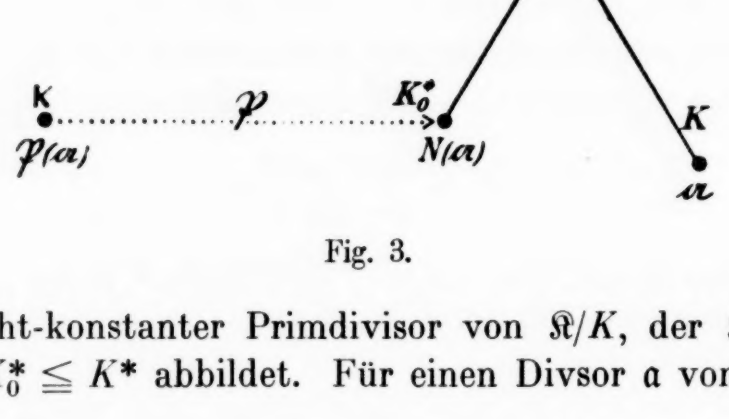

Fig. 3.

b) $\mathfrak{P}$ sei ein nicht-konstanter Primdivisor von $\mathfrak{R}/K$, der $\mathfrak{R}$ homomorph auf K^* und K isomorph auf $K_0^* \leqq K^*$ abbildet. Für einen Divsor $\mathfrak{a}$ von K/k setzen wir (siehe Fig. 3):

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = {} & \text{Urbild in } \mathsf{K} \text{ von } N_{K^*/K_0^*}(\mathfrak{a}) \\ & \text{beim Restklassenisomorphismus mod. } \mathfrak{P} \text{ von } \mathsf{K} \text{ auf } K_0^*.\end{aligned}}$$

Bei der im folgenden mehrfach vorkommenden Normbildung von K^* nach K_0^* werden wir, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, den Index K^*/K_0^* an N der Einfachheit halber fortlassen.

c) Allgemein setzen wir:

$$\boxed{\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) = \prod_i \mathfrak{P}_i(\mathfrak{a})^{r_i}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{D} = \prod_i \mathfrak{P}_i^{r_i}.}$$

Die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ heißt eine *Korrespondenz von K zu* K. Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ Primdivisor (Fälle a) und b)), so reden wir von einer *Primkorrespondenz.*

Ist in b) $\mathfrak{P}$ vom Grade m und hat $\mathfrak{a}$ den Grad f in K, so hat $\mathfrak{a}$ den Grad mf in K^* weil $[K^*: K] = \text{Grad } \mathfrak{P} = m$ ist. Dann hat auch $N(\mathfrak{a})$ den Grad mf in K_0^* und somit $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ den Grad mf in K. Es gilt also die Regel

$$\text{Grad } \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = \text{Grad } \mathfrak{P} \cdot \text{Grad } \mathfrak{a}.$$

Dies ist auch im Falle a) richtig, wo ja Grad $\mathfrak{P} = $ Grad $\wp = 1$ ist. Für den allgemeinen Fall c) ergibt sich daraus dann dieselbe *Gradregel*:

$$\text{Grad } \mathfrak{D}(\mathfrak{a}) = \text{Grad } \mathfrak{D} \cdot \text{Grad } \mathfrak{a}.$$

Der Übersicht halber stellen wir nachstehend die grundlegenden Sätze über Korrespondenzen zunächst ohne Beweise zusammen; die Beweise folgen dann im nächsten Paragraphen.

I. Abhängigkeit von $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ ist als Funktion von $\mathfrak{a}$ ersichtlich multiplikativ. Eine Korrespondenz ist also eine homomorphe Abbildung der Divisorengruppe von K/k in die (d. h. auf eine gewisse Untergruppe der) Divisorengruppe von K/k, und wegen der Gradregel auch der Divisorengruppe nullten Grades von K/k in die von K/k. Dieser Homomorphismus liefert aber sogar einen Homomorphismus der Klassengruppe von K/k in die von K/k, und auch der Klassengruppe nullten Grades von K/k in die von K/k. Es gilt nämlich:

Satz 4 (Homomorphiesatz). *Aus* $\mathfrak{a} \sim 1$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) \sim 1$.

II. Abhängigkeit von $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ ist seiner Definition nach auch als Funktion von $\mathfrak{D}$ multiplikativ. Es bezeichne $\mathfrak{D}_0$ einen konstanten Divisor von $\mathfrak{R}/K$, d. h. einen solchen, dessen sämtliche Primfaktoren konstant sind, und $\mathfrak{a}_0$ einen Divisor nullten Grades von K/k.

Satz 5. *Aus* $\mathfrak{D} = 1$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) = 1$ *für alle* $\mathfrak{a}$.

Satz 6. *Aus* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_0) = 1$ *für alle* $\mathfrak{a}_0$.

Satz 7 (Additionstheorem). *Aus* $\mathfrak{D} \sim 1$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) \sim 1$ *für alle* $\mathfrak{a}$.

Satz 8. *Aus* $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}_0$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_0) \sim 1$ *für alle* $\mathfrak{a}_0$.

Im Gegensatz zum Homomorphiesatz sind diese vier Sätze umkehrbar. Über die formalen Umkehrungen hinaus genügt es sogar, um aus den Behauptungen auf die Voraussetzungen zurückzuschließen, an Stelle *aller Divisoren* $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}_0$ nur *irgendeine unendliche Menge von Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ bzw. Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}$ mit festem $\mathfrak{p}_\infty$ zur Prüfung heranzuziehen. So lautet z. B. die dementsprechende Verschärfung der Umkehrung von Satz 6:

Ist bei festem $\mathfrak{p}_\infty$ *für unendlich viele Primdivisoren* $\mathfrak{D}\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = 1$, *so ist* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$.

Noch genauer ergibt sich sogar, daß es genügt, nur *ein geeignetes* $\mathfrak{p}$ bzw. $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}$ zur Prüfung heranzuziehen. Wir formulieren die Umkehrsätze gleich in dieser verschärften Form. Dabei empfiehlt es sich, statt der direkten Umkehrungsform die durch Verneinung der Aussagen entstehende Umkehrungsform zugrunde zu legen:

Satz 5. *Aus* $\mathfrak{D} \neq 1$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \neq 1$ *für fast alle* $\mathfrak{p}$.

Satz 6. *Aus* $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}_0$ *folgt* $\mathfrak{D}\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) \neq 1$ *für fast alle* $\mathfrak{p}$.

Satz 7. *Aus* $\mathfrak{D} \not\sim 1$ *folgt* $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \not\sim 1$ *für fast alle* $\mathfrak{p}$.

Satz 8. *Aus* $\mathfrak{D} \not\sim \mathfrak{D}_0$ *folgt* $\mathfrak{D}\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) \not\sim 1$ *für fast alle* $\mathfrak{p}$.

Genauer heißt das, daß zu $\mathfrak{D}$ (und $\mathfrak{p}_\infty$) eine endliche Menge $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ von Primdivisoren existiert derart, daß aus der Voraussetzung jeweils die Behauptung für alle Primdivisoren $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ folgt.

Die Sätze 5, 6, 7, 8 nebst ihren formalen Umkehrungen besagen, daß sich gegenseitig eindeutig entsprechen:

der Divisor $\mathfrak{D}$	die Wirkung der Korrespondenz $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ auf die volle Divisorengruppe von K
die Restklasse von $\mathfrak{D}$ nach der Gruppe der konstanten Divisoren	die Wirkung der Korrespondenz auf die Divisorengruppe nullten Grades von K
die gewöhnliche Klasse von $\mathfrak{D}$	die Wirkung der Korrespondenz auf die volle Klassengruppe von K
die Restklasse von $\mathfrak{D}$ nach der Gruppe der Klassen aus konstanten Divisoren (*gröbere Klasse* von $\mathfrak{D}$)	die Wirkung der Korrespondenz auf die Klassengruppe nullten Grades von K.

5. Die Hauptquelle für den Beweis des Additionstheorems (Satz 7) ist der folgende grundlegende Satz, der die Korrespondenzen auf eine andere Art kennzeichnet, nämlich

der Sache nach äquivalent zu der Beschreibung der Korrespondenzen durch algebraische Gleichungen in der algebraischen Geometrie:

Satz 9 (Restidealsatz). *Es sei ξ ein $\mathfrak{D}$-ganzes über k transzendentes Element von* K, *also ein solches, dessen Nennerdivisor zu $\mathfrak{D}$ prim ist.*

Für fast alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K/k ist das $\mathfrak{p}$-Restideal von $\mathfrak{D}_\xi$ gerade

$$\mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p} = \mathfrak{D}(\mathfrak{p})_\xi .$$

Für unsere Anwendungen dieses Satzes kommt es auf die genauere Angabe, welche Primdivisoren $\mathfrak{p}$ hierbei möglicherweise auszunehmen sind, nicht an, sondern nur darauf, daß diese $\mathfrak{p}$ höchstens in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Wir begnügen uns mit der ausführlichen Angabe der möglicherweise auszunehmenden $\mathfrak{p}$ für den Fall einer Primkorrespondenz $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$; hier werden wir den Beweis unter folgenden Voraussetzungen führen, die nach dem bereits Gezeigten für fast alle $\mathfrak{p}$ erfüllt sind:

1. $\mathfrak{p}$ ist prim zum Nenner des Bildes x in K_0^* von ξ beim Restklassenhomomorphismus mod. $\mathfrak{P}$; dies x ist also $\mathfrak{p}$-ganz.

2. Hilfssatz 3 ist auf $\mathfrak{p}$ mit $K_1 = K$, $K_2 = K_0^*$ anwendbar; aus einer Kongruenz in $K^* = K_0^* K$

$$z_0 \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p} \text{ mit } z_0 \text{ in } K_0^*$$

kann also auf die Kongruenz in K_0^*

$$z_0 \equiv 0 \bmod. N(\mathfrak{p})$$

geschlossen werden.

3. $\mathfrak{P}_\xi$ ist fremd zu $\mathfrak{p}$; es hat also $\mathfrak{P}_\xi | \mathfrak{p}$ denselben Grad wie $\mathfrak{P}$ (Hilfssatz 6).

Es sei noch bemerkt, daß im Falle $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ für nicht-konstantes $\mathfrak{P}$ jedes über k transzendente ξ aus K $\mathfrak{P}$-ganz ist, und für konstantes $\mathfrak{P}$ entweder ξ oder $\frac{1}{\xi}$.

Für zusammengesetztes $\mathfrak{D}$ werden wir 1., 2., 3. für jeden Primfaktor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{D}$ zu fordern haben, und überdies noch zu 3. analoge Bedingungen für die Faktoren eines rekursiven Aufbaus von $\mathfrak{D}$ aus den $\mathfrak{P}^{\pm 1}$.

6. Die *Meromorphismentheorie* aus H II ordnet sich in die hier entwickelte Theorie von $\mathfrak{K}/K$ folgendermaßen ein: Im Falle des Geschlechtes $g = 1$ gibt es in jeder Divisorenklasse von $\mathfrak{K}/K$ genau einen Divisor $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{o}^m$, wo $\mathfrak{o}$ ein fester konstanter Primdivisor, $\mathfrak{P}$ ein Primdivisor ersten Grades und m der Grad der Klasse ist. Geht man zu den gröberen Divisorenklassen von $\mathfrak{K}/K$ über, indem man die konstanten Primdivisoren in die Hauptklasse einbezieht, so gibt es also in jeder gröberen Divisorenklasse mindestens einen Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{P}$. Daher kommt man mit der Betrachtung der solchen Primdivisoren $\mathfrak{P}$ entsprechenden Primkorrespondenzen aus. Diese liefern im Falle $K =$ K (für nicht-konstante $\mathfrak{P}$) Meromorphismen von K, d. h. isomorphe Abbildungen von K auf Teilkörper K_0 von K selbst.

Für $g > 1$ kommt man nicht mehr mit Primdivisoren ersten Grades aus. Hier hat man für die gewöhnlichen Divisorenklassen von $\mathfrak{K}/k$ als Repräsentanten $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{o}^g} \cdot \mathfrak{o}^m$, wo $\mathfrak{G}$ ein im allgemeinen eindeutig bestimmter ganzer Divisor g-ten Grades ist, so daß man die gröberen Divisorenklassen durch ganze Divisoren g-ten Grades $\mathfrak{G}$ repräsentieren kann.

Da aber $\mathfrak{G}$ auch im gröberen Sinne nicht notwendig zu einem Primdivisor ersten Grades äquivalent ist, ist der Begriff des Meromorphismus von K zu eng für die Verallgemeinerung auf $g > 1$. Als seine Verallgemeinerung findet sich in unserer Theorie der Umstand, daß ein nicht-konstanter Primdivisor m-ten Grades $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}/K$ durch eine isomorphe Abbildung von K auf einen Teilkörper K_0^* einer algebraischen Erweiterung m-ten Grades K^* von K gegeben ist (Satz 2). Da man aber auch nicht weiß, ob $\mathfrak{G}$ zu einem Primdivisor beliebigen Grades im gröberen Sinne äquivalent ist, ist auch diese Verallgemeinerung des Meromorphismenbegriffs unzureichend. Man muß sich vielmehr mit der Verallgemeinerung der Wirkungen der Meromorphismen auf die Divisoren und Divisorenklassen von K begnügen, also mit homomorphen Abbildungen der Divisorengruppe und Divisorenklassengruppe von K auf Teilgruppen, an Stelle der isomorphen Abbildungen von K auf Teilkörper. Das sind eben die Korrespondenzen, die ja gemäß den Definitionen a), b), c) nicht die Meromorphismen λ aus H II (§ 2), sondern nur die dortigen Wirkungsfunktionen $\lambda_\mathfrak{p}$ und ihre additiven Zusammensetzungen $\lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} + \cdots$ verallgemeinern.

Wie mir Herr Hasse mitteilt, findet sich die richtige und vollständige Verallgemeinerung der Meromorphismentheorie für $g > 1$ durch Heranziehung des reinalgebraischen Äquivalents des Körpers der Abelschen Funktionen zu K/k.

Der Homomorphiesatz (Satz 4) ist die Verallgemeinerung des Homomorphiesatzes in H II (§ 2, 4): Die Abbildung $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ stellt einen Homomorphismus der Gruppe D_0 in sich dar.

Das Additionstheorem (Satz 7) ist die Verallgemeinerung des Additionstheorems in H II (§ 3, 4): Die Addition der Meromorphismen liefert die Addition der zugehörigen linearen Substitutionen, d. h. aus $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ folgt $\lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} + \lambda_3\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$.

Es sei noch bemerkt, daß es im Falle $g > 1$, außer Automorphismen, bei Charakteristik Null überhaupt keine Meromorphismen von K gibt, und bei Primzahlcharakteristik nur die trivialen, bei denen K über dem isomorphen Teilkörper K_0 rein-inseparabel ist. Ist nämlich K/K_0 separabel vom Grade n, so besteht zwischen dem Geschlecht g von K und dem Geschlecht g_0 von K_0 die Hurwitzsche Beziehung

$$g = ng_0 + \gamma,$$

wo γ, das Relativgeschlecht von K/K_0, sich aus dem Grad d der Differente von K/K_0 zu

$$\gamma = \frac{d}{2} - n + 1$$

berechnet. Soll $g = g_0$ sein, so muß nach der Hurwitzschen Formel

$$\frac{d}{2} = (g - 1)(1 - n)$$

sein. Da $d \geqq 0$ ist, ergibt das entweder $g = 0$, $d = 2n - 2$, oder $g = 1$, $d = 0$ (der in H II behandelte Fall), oder $g > 1$, $n = 1$, d. h. $K = K_0$.

§ 3. Beweis der Korrespondenzsätze.

1. *Beweis des Homomorphiesatzes* (*Satz* 4).

Es genügt, die Behauptung für einen Primdivisor $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ zu beweisen, also $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \sim 1$ für $\mathfrak{a} \sim 1$ zu zeigen.

Ist $\mathfrak{P}$ konstant, so ist definitionsgemäß $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = 1$, weil $\mathfrak{a}$ als Hauptdivisor den Grad Null hat. Ist $\mathfrak{P}$ nicht konstant, so zieht sich die Hauptdivisoreigenschaft durch die

Definition von $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ durch: $\mathfrak{a}$ ist auch Hauptdivisor in K^*, also $N(\mathfrak{a})$ Hauptdivisor in K_0^*, und somit das Urbild $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ Hauptdivisor in K.

2. *Beweis des Restidealsatzes* (*Satz* 9).

Wir führen den Beweis zunächst für einen Primdivisor $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$. Es sei also ξ ein $\mathfrak{P}$-ganzes über k transzendentes Element von K.

a) Wir zeigen zuerst, daß für das $\mathfrak{p}$-Restideal von $\mathfrak{P}_\xi$ jedenfalls

$$\mathfrak{P}_\xi \mid \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi$$

gilt, wenn $\mathfrak{p}$ die Voraussetzungen 1., 2. (S. 174) erfüllt. (Zum Beweis siehe die schematische Darstellung in Fig. 4 am Schluß des Beweises.)

Es sei η_i eine $k[\xi]$-Basis von K_ξ. Wir betrachten ein Element

$$P = \sum_i F_i(\xi)\, \eta_i, \qquad F_i(\xi) \text{ in } K[\xi],$$

aus $\mathfrak{P}_\xi$, also

$$\sum_i F_i(\xi)\, \eta_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{P} \quad \text{in } \mathfrak{R}. \tag{1}$$

Aus der Kongruenz (1) ergibt sich durch Übergang zum Restklassenkörper mod. $\mathfrak{P}$ die Gleichung

$$\sum_i F_i(x)\, y_i = 0 \quad \text{in } K^*, \tag{2}$$

wo $(\xi;\, \eta_i) \to (x;\, y_i)$ beim Restklassenhomomorphismus mod. $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ auf K^*. Die so definierten Elemente x, y_i liegen in K_0^*, für konstantes $\mathfrak{P}$ sogar in k. Da x nach der Voraussetzung 1. $\mathfrak{p}$-ganz ist, sind auch die von x ganz-algebraisch abhängigen y_i $\mathfrak{p}$-ganz. Wird das Element P, wie es der Bildung des $\mathfrak{p}$-Restideals $\mathfrak{P}_\xi \mid \mathfrak{p}$ entspricht, als $\mathfrak{p}$-ganz vorausgesetzt, so sind nach Satz 3 die $F_i(\xi)$ $\mathfrak{p}$-ganz. Daher können wir in der Gleichung (2) zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ übergehen:

$$\sum_i f_i(x)\, y_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \quad \text{in } K^*. \tag{3}$$

Auf Grund der Voraussetzung 2. folgt aus (3) nach Hilfssatz 3 weiter:

$$\sum_i f_i(x)\, y_i \equiv 0 \bmod N(\mathfrak{p}) \quad \text{in } K_0^*, \tag{4}$$

weil die linke Seite ein Element aus K_0^* ist. Aus (4) folgt durch isomorphe Rückübertragung auf K gemäß der Definition von $\mathfrak{P}(\mathfrak{p})$:

$$\sum_i f_i(\xi)\, \eta_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}(\mathfrak{p}) \quad \text{in } \mathsf{K}. \tag{5}$$

Die linke Seite in (5) ist aber gerade der Rest mod. $\mathfrak{p}$ in K des Ausgangselementes P. Dieser liegt demnach im Ideal $\mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi$, wie behauptet.

Für konstantes $\mathfrak{P}$ fallen in diesem Schlußschema die Schritte (3) und (4) fort, und (5) ergibt sich gemäß der Definition von $\mathfrak{P}(\mathfrak{p})$ unmittelbar aus (2).

$$\begin{array}{lcl}
(1)\ \sum_i F_i(\xi)\eta_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{P} \text{ in } \mathfrak{R} & \xrightarrow{\quad\mathfrak{P}\quad} & (2)\ \sum_i F_i(x) y_i = 0 \text{ in } K^* \\
 & & \Big\downarrow \text{für fast alle } \mathfrak{p} \text{ (Vor. 1.)} \\
 & & (3)\ \sum_i f_i(x) y_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \text{ in } K^* \\
 & & \Big\downarrow \text{für fast alle } \mathfrak{p} \text{ (Vor. 2.)} \\
(5)\ \sum_i f_i(\xi)\eta_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}(\mathfrak{p}) \text{ in } \mathsf{K} & \xleftarrow{\quad\mathfrak{P}^{-1}\quad} & (4)\ \sum_i f_i(x) y_i \equiv 0 \bmod N(\mathfrak{p}) \text{ in } K_0^*.
\end{array}$$

Fig. 4.

b) Wir zeigen jetzt, daß genau

$$\mathfrak{P}_\xi | \mathfrak{p} = \mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi$$

gilt, wenn $\mathfrak{p}$ auch noch die Voraussetzung 3. (S. 174) erfüllt, wenn also $\mathfrak{P}_\xi$ fremd zu $\mathfrak{p}$ ist.

Nach Hilfssatz 6 hat dann $\mathfrak{P}_\xi \mid \mathfrak{p}$ denselben Grad wie $\mathfrak{P}_\xi$, es gilt also

$$\text{Grad } \mathfrak{P}_\xi \mid \mathfrak{p} = \text{Grad } \mathfrak{P}_\xi = \text{Grad } \mathfrak{P}.$$

Andererseits ist aber nach der Gradregel auch

$$\text{Grad } \mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi = \text{Grad } \mathfrak{P}(\mathfrak{p}) = \text{Grad } \mathfrak{P} \cdot \text{Grad } \mathfrak{p} = \text{Grad } \mathfrak{P}.$$

Somit folgt

$$\text{Grad } \mathfrak{P}_\xi | \mathfrak{p} = \text{Grad } \mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi.$$

Zusammen mit der bereits bewiesenen Tatsache $\mathfrak{P}_\xi | \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi$ ergibt das in der Tat die Behauptung $\mathfrak{P}_\xi | \mathfrak{p} = \mathfrak{P}(\mathfrak{p})_\xi$.

c) Es bleibt der Fall eines zusammengesetzten

$$\mathfrak{D} = \prod_i \mathfrak{P}_i^{r_i}$$

zu erledigen. Dafür ist einerseits definitionsgemäß

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) = \prod_i \mathfrak{P}_i(\mathfrak{p})^{r_i},$$

also

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p})_\xi = \prod_i \mathfrak{P}_i(\mathfrak{p})_\xi^{r_i}.$$

Andrerseits ist nach Hilfssatz 7 für fast alle $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p} = \prod_i (\mathfrak{P}_{i\xi} | \mathfrak{p})^{r_i}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung nach dem bereits Bewiesenen.

3. *Beweis der Sätze* 5, 6, 7, 8.

Sätze 5, 6. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Definitionen.

Satz 7 (*Additionstheorem*). Sei $\mathfrak{D} \sim 1$. Wir wählen ein über k transzendentes Element ξ von K, dessen Nenner nur einen einzigen Primdivisor $\wp_\infty$ von K enthält, und zwar wählen wir dabei $\wp_\infty$ so, daß der zugehörige konstante Primdivisor von $\mathfrak{K}/K$ nicht in $\mathfrak{D}$ vorkommt, so daß also ξ $\mathfrak{D}$-ganz wird. Dann können wir für fast alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K den Restidealsatz anwenden: Sei $\mathfrak{p}$ ein in ihm zulässiger Primdivisor. Wir normieren die Hauptdivisordarstellung

$$\mathfrak{D} \cong D$$

durch eine Primelementpotenz zu $\mathfrak{p}$ so, daß D zu $\mathfrak{p}$ (als Funktionalprimdivisor) prim ist. Ist dann

$$D \equiv \delta \bmod \mathfrak{p}, \qquad \delta \neq 0 \text{ in } \mathsf{K},$$

so ist

$$\mathfrak{D}_\xi = D\mathfrak{K}_\xi, \qquad \mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p} = \delta \mathsf{K}_\xi.$$

Der Restidealsatz ergibt also

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p})_\xi = \delta \mathsf{K}_\xi.$$

Hieraus folgt nach Hilfssatz 4 die Divisorenäquivalenz

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \sim 1.$$

Diese für fast alle $\mathfrak{p}$ festgestellte Beziehung ergibt dann weiter

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) \sim 1$$

für alle zu endlich vielen Primdivisoren primen Divisoren $\mathfrak{a}$ von K. Da aber die Klasse von $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ nach dem Homomorphiesatz nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ abhängt und in jeder Divisorenklasse zu den Ausnahmeprimdivisoren prime Divisoren vorhanden sind, ergibt sich schließlich $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) \sim 1$ für alle $\mathfrak{a}$, w. z. b. w.

Satz 8. Ist $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}_0$, also $\dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0} \sim 1$, so folgt nach Satz 7 $\dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0}(\mathfrak{a}) \sim 1$, also $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{D}_0(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a}$. Nun ist aber nach den Definitionen $\mathfrak{D}_0(\mathfrak{a}_0) = 1$ für alle $\mathfrak{a}_0$. Es folgt also $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_0) \sim 1$ für alle $\mathfrak{a}_0$, w. z. b. w.

4. *Beweis der Umkehrsätze* $\bar{5}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$, $\bar{8}$.

Umkehrsatz $\bar{5}$. Sei $\mathfrak{D} \neq 1$. Ist $\mathfrak{D}$ ganz (oder auch nur Grad $\mathfrak{D} \neq 0$), so ist auch $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ ganz (Grad $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \neq 0$), und somit die Behauptung $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \neq 1$ sogar für alle $\mathfrak{p}$ richtig.

Ist $\mathfrak{D}$ gebrochen, so ergibt sich die Behauptung, wenn gezeigt ist, daß auch

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \text{ gebrochen für fast alle } \mathfrak{p}$$

ist. Sei dazu wie im Beweis des Restidealsatzes $(\xi; \eta_i)$ eine $\mathfrak{D}$-ganze Erzeugung von K/k. Da nach dem Restidealsatz

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p})_\xi = \mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p} \text{ für fast alle } \mathfrak{p}$$

gilt, genügt es zu zeigen, daß

$$\mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p} \text{ gebrochen für fast alle } \mathfrak{p}$$

ist.

Sei dazu

$$D_i = \sum_j \frac{G_{ij}(\xi)}{G(\xi)} \eta_j$$

eine $K[\xi]$-Basis von $\mathfrak{D}_\xi$. Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{D}$ gebrochen ist, ist dann gleichbedeutend damit, daß die Übergangsdeterminante

$$\frac{|G_{ij}(\xi)|}{G(\xi)^n} \text{ gebrochen in } \xi$$

ist, daß also die Division

$$|G_{ij}(\xi)| = G(\xi)^n Q(\xi) + R(\xi)$$

einen Rest $R(\xi) \neq 0$ von niedrigerem Grade als $G(\xi)^n$ ergibt. Nun ist die Basis D_i für fast alle $\mathfrak{p}$ regulär, liefert also nach Hilfssatz 5 durch Übergang zu den Resten mod. $\mathfrak{p}$ in K eine $k[\xi]$-Basis

$$\delta_i = \sum_j \frac{g_{ij}(\xi)}{g(\xi)} \eta_j$$

von $\mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p}$. Für fast alle $\mathfrak{p}$ ist weiter $Q(\xi)$ ganz und $R(\xi)$ primitiv, also

$$|g_{ij}(\xi)| = g(\xi)^n q(\xi) + r(\xi)$$

mit $r(\xi) \neq 0$ von niedrigerem Grade als $g(\xi)^n$; $g(\xi)$ hat ja wegen der $\mathfrak{p}$-Regularität denselben Grad wie $G(\xi)$. Demnach ist auch die Übergangsdeterminante

$$\frac{|g_{ij}(\xi)|}{g(\xi)^n} \text{ gebrochen in } \xi \text{ für fast alle } \mathfrak{p},$$

d. h. es ist in der Tat $\mathfrak{D}_\xi | \mathfrak{p}$ gebrochen für fast alle $\mathfrak{p}$.

Umkehrsatz $\bar{6}$. Sei $\mathfrak{D}$ nicht-konstant. Ist $\mathfrak{p}_\infty$ ein fester Primdivisor von K und $\mathfrak{D}_0$ der dem Divisor $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}_\infty)$ von K/k entsprechende konstante Divisor von $\mathfrak{K}/K$, so hat man

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = \frac{\mathfrak{D}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{D}(\mathfrak{p}_\infty)} = \frac{\mathfrak{D}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{D}_0(\mathfrak{p})} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0}(\mathfrak{p}).$$

Da hier nach Voraussetzung $\dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0} \neq 1$ ist, folgt nach dem Umkehrsatz $\bar{5}$ $\mathfrak{D}\left(\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) \neq 1$ für fast alle $\mathfrak{p}$, w. z. b. w.

Umkehrsatz $\bar{7}$. Sei $\mathfrak{D} \nsim 1$. Ist Grad $\mathfrak{D} \neq 0$, so ist nach der Gradregel auch Grad $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \neq 0$, und somit die Behauptung $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \nsim 1$ sogar für alle $\mathfrak{p}$ richtig.

Um den Beweis auch im Falle Grad $\mathfrak{D} = 0$ zu erbringen, können wir nach dem bereits bewiesenen Satz 7 statt $\mathfrak{D}$ irgendeinen zu $\mathfrak{D}$ äquivalenten Divisor $\mathfrak{D}'$ zugrundelegen. Wir bestimmen einen solchen folgendermaßen: Sei ξ ein über k transzendentes Element von K, dessen Nenner nur einen einzigen Primdivisor $\wp_\infty$ von K/k enthält, und sei $\mathfrak{P}_\infty$ der zugehörige konstante Primdivisor von $\mathfrak{K}/K$. Dann wählen wir in der Klasse von $\mathfrak{D}$ einen Divisor der Form

$$\mathfrak{D}' = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}_\infty^r}, \quad \mathfrak{A} \text{ ganz und prim zu } \mathfrak{P}_\infty,$$

was nach dem Riemannschen Teil des Riemann-Rochschen Satzes für einen hinreichend hohen Exponenten r geht. Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{D}' \nsim 1$ ist, ist nun nach Hilfssatz 4 gleichbedeutend damit, daß das zugeordnete $\mathfrak{K}_\xi$-Ideal $\mathfrak{D}'_\xi = \mathfrak{A}_\xi$ kein Hauptideal ist:

$$\mathfrak{A}_\xi \nsim \mathfrak{K}_\xi.$$

Ebenso ist die Behauptung, daß $\mathfrak{D}'(\mathfrak{p}) \nsim 1$ für fast alle $\mathfrak{p}$ ist, gleichbedeutend damit, daß das zugehörige K_ξ-Ideal $\mathfrak{D}'(\mathfrak{p})_\xi \nsim \mathsf{K}_\xi$ für fast alle $\mathfrak{p}$ ist. Da nach dem Restidealsatz $\mathfrak{D}'(\mathfrak{p})_\xi = \mathfrak{D}'_\xi \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$ ist, genügt es also zu zeigen, daß

$$\mathfrak{A}_\xi \mid \mathfrak{p} \nsim \mathsf{K}_\xi \text{ für fast alle } \mathfrak{p}$$

ist.

Dazu stellen wir ein rechnerisches Kriterium für die Idealäquivalenz $\mathfrak{A}_\xi \sim \mathfrak{K}_\xi$ auf, das im Nullsein gewisser Resultanten besteht. $\mathfrak{A}_\xi \sim \mathfrak{K}_\xi$ gilt genau dann, wenn es in $\mathfrak{A}_\xi$ ein Element A gibt, dessen von $\mathfrak{K}$ nach $K(\xi)$ genommene Norm $N_\xi(A)$ als Polynom in ξ denselben Grad r hat wie $\mathfrak{A}_\xi$ selbst. Da $N_\xi(A)$ für alle $A \neq 0$ aus $\mathfrak{A}_\xi$ sicher mindestens den Grad r hat, kann man stattdessen formal etwas handlicher auch die Existenz eines $A \neq 0$ aus $\mathfrak{A}_\xi$ mit Grad $N_\xi(A) \leqq r$ fordern.

Um ein Existenzkriterium für ein solches A in ganzrationaler Form zu erhalten, wählen wir eine $K[\xi]$-Normalbasis von $\mathfrak{A}_\xi$. Wir leiten dann die Elemente

$$A = \sum_i F_i(\xi)\, A_i, \quad F_i(\xi) \text{ in } K[\xi],$$

aus $\mathfrak{A}_\xi$ durch Einsetzungen aus einem allgemeinen Element

$$U = \sum_i U_i(\xi)\, A_i$$

her, dessen Koeffizienten

$$U_i(\xi) = \sum_j u_{ij} \xi^j$$

Polynome in ξ mit unbestimmten Koeffizienten u_{ij} sind. Hierbei brauchen wir, um *alle* Elemente A aus $\mathfrak{A}_\xi$ mit Grad $N_\xi(A) \leqq r$ zu erhalten, nur endlich viele Unbestimmte u_{ij},

d. h. wir kommen mit einer festen oberen Schranke M für den Grad der Polynome $U_i(\xi)$ aus. Aus der Normalbasiseigenschaft folgt nämlich, wie wir nachher zeigen werden:

Hilfssatz 9. *Haben für ein $A \neq 0$ aus dem ganzen $\mathfrak{R}_\xi$-Ideal $\mathfrak{A}_\xi$ die Koeffizienten $F_i(\xi)$ die Grade m_i, so gilt*

$$\text{Grad } N_\xi(A) \geqq n \,\text{Max}\, m_i - (n-1).$$

Wählen wir also M so groß, daß

$$nM - (n-1) \geqq r$$

ist, so gilt für jedes A aus $\mathfrak{A}_\xi$ mit $r \geqq \text{Grad } N_\xi(A)$

$$M \geqq \text{Max}\, m_i,$$

d. h. wir kommen mit diesem M als oberer Schranke für die Grade der $U_i(\xi)$ aus.

Nun ist

$$N_\xi(U) = \sum_{\nu=0}^{N} G_\nu(u)\, \xi^\nu$$

ein Polynom in ξ eines gewissen Grades N, dessen Koeffizienten $G_\nu(u)$ homogene Polynome n-ter Dimension in den Unbestimmten u_{ij} mit Koeffizienten aus K sind. Nach dem Gezeigten entstehen die Elemente A aus $\mathfrak{A}_\xi$ mit Grad $N_\xi(A) \leqq r$ genau durch Einsetzung der Lösungen in K des homogenen Gleichungssystems

$$\text{(G)} \qquad G_\nu(u) = 0 \qquad (\nu = r+1, \ldots, N),$$

und daher die Elemente A aus $\mathfrak{A}_\xi$ mit $N_\xi(A) = r$ durch Einsetzung der nicht-identischen Lösungen in K dieses Gleichungssystems. Sind also R_i die Resultanten von (G), so gilt $\mathfrak{A}_\xi \sim \mathfrak{R}_\xi$ genau dann, wenn alle $R_i = 0$ sind; denn genau dann ist (G) in K nicht-identisch lösbar [4]).

$N_\xi(U)$ ergibt sich aus den A_i und ihren über $K(\xi)$ Konjugierten durch ganzrationale Rechenoperationen, und die Resultanten R_i ergeben sich dann weiter durch ganzrationale Rechenoperationen aus den in K gelegenen Koeffizienten von $N_\xi(U)$. Nach Hilfssatz 8 bilden nun für fast alle $\mathfrak{p}$ die Reste α_i in K der A_i mod. $\mathfrak{p}$ eine $k[\xi]$-Normalbasis des $\mathfrak{p}$-Restideals $\mathfrak{A}_\xi \,|\, \mathfrak{p}$. Unterwirft man die ganzrationalen Rechenoperationen, die von den A_i zu den R_i führen, der Restbildung mod. $\mathfrak{p}$, so erhält man die zu den α_i gehörigen Resultanten ϱ_i.

Ist, wie vorausgesetzt, $\mathfrak{A}_\xi \nsim \mathfrak{R}_\xi$, so sind die R_i nicht alle Null. Dann sind für fast alle $\mathfrak{p}$ auch ihre $\mathfrak{p}$-Reste ϱ_i nicht alle Null, und somit ist dann $\mathfrak{A}_\xi \,|\, \mathfrak{p} \nsim \mathsf{K}_\xi$ für fast alle $\mathfrak{p}$.

Es bleibt jetzt noch der *Beweis des Hilfssatzes* 9 nachzuholen. In dem hier vorliegenden Falle, daß der Nenner von ξ in $\mathfrak{R}/K$ die n-te Potenz eines einzigen Primdivisors $\mathfrak{P}_\infty$ ist, ist der in der Normalbasisdefinition zugrundeliegende Exponent eines Elements A aus $\mathfrak{R}$, d. h. die größte ganze Zahl, für welche $A\xi^{\text{Exp}\,A}$ noch ganz für den Nenner von ξ ist, auch charakterisiert als die größte ganze Zahl, für welche $A\mathfrak{P}_\infty^{-n\,\text{Exp}\,A}$ noch $\mathfrak{P}_\infty$-ganz ist, und ist daher einfach durch das größte Ganze

$$\text{Exp}\, A = \left[\frac{v(A)}{n}\right]$$

gegeben, wo $v(A)$ die Ordnungszahl von A in $\mathfrak{P}_\infty$ ist. Daraus ergibt sich ohne weiteres die Regel:

$$\text{Exp}\, A + \text{Exp}\, B \leqq \text{Exp}\, AB \leqq \text{Exp}\, A + \text{Exp}\, B + 1.$$

---

[4]) Siehe etwa B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, § 76.

Dies gilt allgemeiner auch für solche Elemente aus einer endlich-algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{R}$, in deren Primdivisorzerlegung sich die Primteiler von $\mathfrak{P}_\infty$ zu einer ganzzahligen Potenz von $\mathfrak{P}_\infty$ selbst zusammenfassen. Das ist insbesondere für die in bezug auf $K(\xi)$ Konjugierten A^σ eines Elements A aus $\mathfrak{R}$ im zugehörigen über $K(\xi)$ galoisschen Körper $\mathfrak{R}^*$ der Fall, weil der Nennerdivisor $\mathfrak{P}_\infty^n$ von ξ und somit auch $\mathfrak{P}_\infty$ selbst bei den Automorphismen σ von $\mathfrak{R}^*/K(\xi)$ invariant ist: es ist durchweg $\operatorname{Exp} A^\sigma = \operatorname{Exp} A$, und aus $N_\xi(A) = \prod_\sigma A^\sigma$ ergibt sich so die Abschätzung

$$n \operatorname{Exp} A \leqq \operatorname{Exp} N_\xi(A) \leqq n \operatorname{Exp} A + (n-1).$$

Damit ergibt sich der Beweis des Hilfssatzes 9 folgendermaßen: Sei $\operatorname{Exp} A_i = \varepsilon_i$. Nach Voraussetzung ist

$$\operatorname{Exp} F_i(\xi) = -\operatorname{Grad} F_i(\xi) = -m_i.$$

Nach der Regel für die Exponentenbildung bei Darstellung durch eine Normalbasis [5]) hat man dann

$$\operatorname{Exp} A = \operatorname{Exp} \sum_i F_i(\xi) A_i = \operatorname{Min} \operatorname{Exp} F_i(\xi) A_i = \operatorname{Min} (-m_i + \varepsilon_i).$$

Weil $\mathfrak{A}_\xi$ als ganz vorausgesetzt war, sind die $\varepsilon_i \leqq 0$, und es folgt

$$\operatorname{Exp} A \leqq \operatorname{Min} (-m_i) = -\operatorname{Max} m_i.$$

Die hergeleitete Abschätzung für den Exponenten von $N_\xi(A)$ ergibt dann

$$\operatorname{Exp} N_\xi(A) \leqq -n \operatorname{Max} m_i + (n-1)$$

und somit

$$\operatorname{Grad} N_\xi(A) = -\operatorname{Exp} N_\xi(A) \geqq n \operatorname{Max} m_i - (n-1),$$

wie behauptet.

Umkehrsatz $\bar{8}$. Der Beweis ergibt sich jetzt aus Umkehrsatz $\bar{7}$ ganz genau so, wie der Beweis des Umkehrsatzes $\bar{6}$ aus Umkehrsatz $\bar{5}$. Man muß nur das dortige $\neq$ durch $\nsim$ ersetzen.

Es sei noch bemerkt, daß die in den Beweisen der Umkehrsätze 5 und $\bar{7}$ angestellten Überlegungen über den Übergang zum $\mathfrak{p}$-Restideal unverändert auch für den Fall gelten, daß *K irgendein Körper mit arithmetischen Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ ist, z. B. ein algebraischer Zahlkörper.

§ 4. Zusammensetzung von Korrespondenzen.

K_1, K_2, K_3 seien drei algebraische Funktionenkörper einer Unbestimmten über k. Wir beweisen:

Satz 10. *Zu einem Divisor $\mathfrak{D}_{12}$ von K_1K_2/K_1 und einem Divisor $\mathfrak{D}_{23}$ von K_2K_3/K_2 gibt es einen Divisor $\mathfrak{D}_{13}$ von K_1K_3/K_1 mit*

$$\mathfrak{D}_{23}(\mathfrak{D}_{12}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{D}_{13}(\mathfrak{a})$$

für alle Divisoren $\mathfrak{a}$ von K_1/k.

Beweis. Es genügt, den Fall zu behandeln, daß $\mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{Q}$ Primdivisoren sind.

a) Sei $\mathfrak{P}$ konstant und $\mathfrak{p}$ der zugehörige Primdivisor von K_2/k. Ist Grad $\mathfrak{a} = f$

[5]) Siehe F. K. Schmidt, l. c.[3]), Satz 7.

und $\mathfrak{R}$ der zu $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ gehörige konstante Primdivisor von K_1K_3/K_1, so hat man

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{p}^f) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{p})^f = \mathfrak{R}(\mathfrak{a}),$$

d. h. die Behauptung wird durch $\mathfrak{D}_{13} = \mathfrak{R}$ erfüllt.

b) Sei $\mathfrak{Q}$ konstant und $\mathfrak{q}$ der zugehörige Primdivisor von K_3/k. Ist Grad $\mathfrak{a} = f$, Grad $\mathfrak{P} = F$ und $\overline{\mathfrak{Q}}$ der zu $\mathfrak{q}$ gehörige konstante Primdivisor von K_1K_3/K_1, so hat man

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{q}^{fF} = \overline{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{a})^F = \overline{\mathfrak{Q}}^F(\mathfrak{a}),$$

d. h. die Behauptung wird durch $\mathfrak{D}_{13} = \overline{\mathfrak{Q}}^F$ erfüllt.

c) Seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ beide nicht-konstant. Wir bezeichnen die durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gelieferten Restklassenisomorphismen von K_2 und K_3 mit π und $\varkappa$; die zugehörigen Rest-

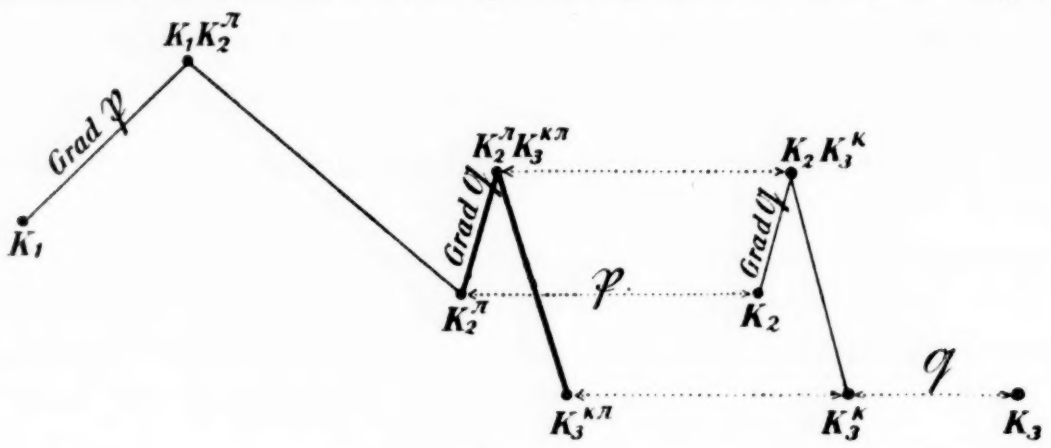

Fig. 5.

klassenkörper sind dann $K_1K_2^\pi$ und $K_2K_3^\varkappa$. Der Erweiterung $K_2K_3^\varkappa/K_2$ entspricht isomorph eine Erweiterung $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}/K_2^\pi$, die nur bis auf Isomorphismen über K_2^π festliegt (siehe Fig. 5).

Es ist

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = N_{K_1K_2^\pi/K_2^\pi}(\mathfrak{a})^{\pi-1}, \quad \mathfrak{Q}(\mathfrak{b}) = N_{K_2K_3^\varkappa/K_3^\varkappa}(\mathfrak{b})^{\varkappa-1}$$

für $\mathfrak{a}$ aus K_1, $\mathfrak{b}$ aus K_2. Daraus ergibt sich

$$(1) \quad \mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) = N_{K_2K_3^\varkappa/K_3^\varkappa}(N_{K_1K_2^\pi/K_2^\pi}(\mathfrak{a})^{\pi-1})^{\varkappa-1} = N_{K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}/K_3^{\varkappa\pi}}(N_{K_1K_2^\pi/K_2^\pi}(\mathfrak{a}))^{\pi-1\varkappa-1}.$$

Wir betrachten vorweg den gedanklich einfacheren Fall, daß $\mathfrak{Q}$ vom ersten Grade ist. Dann ist $K_3^\varkappa \leqq K_2$, also

$$K_3^{\varkappa\pi} \leqq K_2^\pi,$$

und somit $\varkappa\pi$ ein Isomorphismus von K_3 auf den Teilkörper $K_3^{\varkappa\pi}$ der endlich-algebraischen Erweiterung $K_1K_2^\pi$ von K_1. Demgemäß definiert $\varkappa\pi$ einen nicht-konstanten Primdivisor $\mathfrak{R}$ von K_1K_3/K_1, dessen Restklassenkörper

$$K_1^* = K_1K_3^{\varkappa\pi} \leqq K_1K_2^\pi$$

ist; es sei

$$e = [K_1K_2^\pi : K_1^*].$$

(1) vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) &= N_{K_2^\pi/K_3^{\varkappa\pi}}(N_{K_1K_2^\pi/K_2^\pi}(\mathfrak{a}))^{\pi-1\varkappa-1} \\ &= N_{K_1K_2^\pi/K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a})^{(\varkappa\pi)-1} \\ &= (N_{K_1^*K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a})^{(\varkappa\pi)-1})^e = \mathfrak{R}(\mathfrak{a})^e = \mathfrak{R}^e(\mathfrak{a}).\end{aligned}$$

Die Behauptung wird also durch $\mathfrak{D}_{13} = \mathfrak{R}^e$ erfüllt.

Um auch im allgemeinen Fall aus dem Isomorphismus $\varkappa\pi$ von K_3 Primdivisoren von $K_1 K_3/K_1$ herzuleiten, müssen wir die beiden Erweiterungen $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}$ und $K_1 K_2^\pi$ von K_2^π komponieren. Dabei ist zu beachten, daß $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}$ nur als Erweiterungstypus von K_2^π gegeben ist und nicht schon als Teilkörper einer auch $K_1 K_2^\pi$ umfassenden Erweiterung von K_2^π; daher ist die auszuführende Komposition im allgemeinen mehrdeutig.

Für unseren Beweis ist es zweckmäßig, umgekehrt $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}$ als fest und $K_1 K_2^\pi$ als nur dem Typus über K_2 nach bestimmt zu betrachten, d. h. die verfügbaren Isomorphismen auf K_1 zu werfen. Wir sehen demnach $K_1 K_2^\pi/K_2^\pi$ als hyperkomplexes System an und unterwerfen es der Grundkörpererweiterung $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}/K_2^\pi$. Ist das System oder die Grundkörpererweiterung separabel, so ist bekanntlich das durch die Grundkörpererweiterung entstehende hyperkomplexe System halbeinfach, also direkte Summe von Körpern $K^{(i)}$. Jeder Komponentenkörper $K^{(i)}$ entsteht aus dem neuen Grundkörper $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}$ durch Komposition mit einem Körper vom Erweiterungstypus $K_1 K_2^\pi/K_2^\pi$, enthält also einen zu K_1 isomorphen Teilkörper $K_1^{\varrho_i}$ derart, daß

$$K^{(i)} = K_1^{\varrho_i} K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}$$

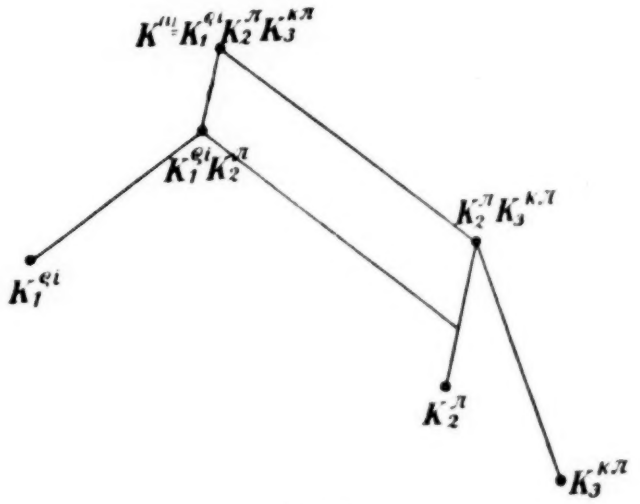

Fig. 6.

ist (siehe Fig. 6). Der direkten Summenzerlegung entsprechend besteht die Normzerlegung

$$N_{K_1 K_2^\pi/K_2^\pi}(\mathfrak{a}) = \prod_i N_{K^{(i)}/K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i}). \tag{2}$$

Der Isomorphismus $\varkappa\pi$ bildet K_3 auf den Teilkörper $K_3^{\varkappa\pi}$ der endlich-algebraischen Erweiterung $K^{(i)}$ von $K_1^{\varrho_i}$ ab, definiert also für jede Komponente der direkten Zerlegung einen nicht-konstanten Primdivisor $\mathfrak{R}_i^{\varrho_i}$ von $K_1^{\varrho_i} K_3/K_1^{\varrho_i}$, dessen Restklassenkörper

$$K_{1i}^{*\varrho_i} = K_1^{\varrho_i} K_3^{\varkappa\pi} \leqq K^{(i)}$$

ist; es sei

$$e_i = [K^{(i)} : K_{1i}^{*\varrho_i}].$$

Dem entspricht für jede Komponente ein nicht-konstanter Primdivisor $\mathfrak{R}_i$ von $K_1 K_3/K_1$, für den

$$\mathfrak{R}_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{R}_i^{\varrho_i}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})$$

gilt.

Aus (1) und (2) ergibt sich jetzt

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) = N_{K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}/K_3^{\varkappa\pi}}\Big(\prod_i N_{K^{(i)}/K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})\Big)^{\pi^{-1}\varkappa^{-1}} = \prod_i N_{K^{(i)}/K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})^{(\varkappa\pi)^{-1}}.$$

Hierin ist

$$N_{K^{(i)}/K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})^{(\varkappa\pi)^{-1}} = (N_{K_{1i}^{*\varrho_i}/K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})^{(\varkappa\pi)^{-1}})^{e_i} = \mathfrak{R}_i^{\varrho_i}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})^{e_i} = \mathfrak{R}_i(\mathfrak{a})^{e_i} = \mathfrak{R}_i^{e_i}(\mathfrak{a}).$$

Die Behauptung wird also durch $\mathfrak{D}_{13} = \prod_i \mathfrak{R}_i^{e_i}$ erfüllt.

Sind beide Erweiterungen $K_1 K_2^\pi/K_2^\pi$ und $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}/K_2^\pi$ inseparabel, so existiert nach Hilfssatz 2 eindeutig ein größter rein-inseparabler Teilkörper $(K_2^\pi)^{q^{-1}}$, über dem dann eine der beiden Erweiterungen separabel ist. Wir nehmen dann $(K_2^\pi)^{q^{-1}}$ statt K_2^π als Grundkörper für die Komposition nach dem obigen Schema. Dann tritt an Stelle der Normzerlegung (2) nur

$$N_{K_1 K_2^\pi/(K_2^\pi)^{q^{-1}}}(\mathfrak{a}) = \prod_i N_{K^{(i)}/K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i}).$$

Da aber einfach

$$N_{(K_2^\pi)^{q^{-1}}/K_2^\pi}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^q$$

für alle $\mathfrak{b}$ aus $(K_2^\pi)^{q^{-1}}$ gilt, ergibt sich statt (2) jetzt

$$N_{K_1 K_2^\pi/K_2^\pi}(\mathfrak{a}) = \left(\prod_i N_{K^{(i)}/K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}}(\mathfrak{a}^{\varrho_i})\right)^q.$$

Es tritt also einfach noch der Exponent q hinzu, und die Behauptung wird jetzt durch $\mathfrak{D}_{13} = \prod_i \mathfrak{R}_i^{e_i/}$ erfüllt.

§ 5. Zusammenfassung. Transformatoren und Multiplikatoren.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse unserer algebraischen Theorie der Korrespondenzen in gruppentheoretischer Ausdrucksweise zusammen.

Durch eine Korrespondenz wird nach Satz 4 die $\left\{\begin{matrix}\text{volle Klassengruppe}\\ \text{Klassengruppe nullten Grades}\end{matrix}\right\}$ von K homomorph in die von K abgebildet. Diese Homomorphismen nennen wir die $\left\{\begin{matrix}\textit{Transformatoren}\\ \textit{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ *von* K *in* K. Sie entsprechen nach den Sätzen 7, 8 nebst deren formalen Umkehrungen umkehrbar eindeutig den $\left\{\begin{matrix}\text{gewöhnlichen}\\ \text{gröberen}\end{matrix}\right\}$ Klassen von $\mathfrak{R}/K$.

Der gruppentheoretisch erklärten Homomorphismenaddition der $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatoren}\\ \text{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ entspricht dabei die Multiplikation der $\left\{\begin{matrix}\text{gewöhnlichen}\\ \text{gröberen}\end{matrix}\right\}$ Klassen. Daher bilden die $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatoren}\\ \text{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ einen Modul (additive abelsche Gruppe), den $\left\{\begin{matrix}\textit{Transformatorenmodul}\\ \textit{Multiplikatorenmodul}\end{matrix}\right\}$ *von* K *in* K. Unser Hauptergebnis drückt sich dann so aus:

Hauptsatz. *Der* $\left\{\begin{matrix}\textit{Transformatorenmodul}\\ \textit{Multiplikatorenmodul}\end{matrix}\right\}$ *von* K *in* K *ist isomorph zur* $\left\{\begin{matrix}\textit{gewöhnlichen}\\ \textit{gröberen}\end{matrix}\right\}$ *Klassengruppe von* $\mathfrak{R}/K$.

Für drei Körper K_1, K_2, K_3 entspricht der gruppentheoretisch erklärten Homomorphismenmultiplikation der $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatoren}\\ \text{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ von K_1 in K_2 und K_2 in K_3 zu solchen von K_1 in K_3 die durch Satz 10 gegebene Zusammensetzung der Korrespondenzen. Ist

K zu K isomorph (bezügl. k) und φ ein fester Isomorphismus von K auf K, so werden die Korrepondenzen $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ von K zu K durch Anfügung des Isomorphismus φ in der Form $\mathfrak{a} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{a})\varphi$ zu *Korrespondenzen von K zu sich*, und dementsprechend die $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatoren}\\ \text{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ von K in K zu $\left\{\begin{matrix}\textit{Transformatoren}\\ \textit{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ *von K in sich.*

Der $\left\{\begin{matrix}\textit{Transformatorenmodul}\\ \textit{Multiplikatorenmodul}\end{matrix}\right\}$ *von K in sich ist ein Ring.*

Denn er ist im Ring aller Automorphismen der $\left\{\begin{matrix}\text{vollen Klassengruppe}\\ \text{Klassengruppe nullten Grades}\end{matrix}\right\}$ von K enthalten, und das gruppentheoretische Homomorphismenprodukt je zweier $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatoren}\\ \text{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ von K in sich ist nach Satz 10 wieder ein $\left\{\begin{matrix}\text{Transformator}\\ \text{Multiplikator}\end{matrix}\right\}$ von K in sich.

Wir nennen diesen Ring den $\left\{\begin{matrix}\textit{Transformatorenring}\\ \textit{Multiplikatorenring}\end{matrix}\right\}$ *von K in sich.* Der Multiplikatorenring von K in sich entsteht aus dem Transformatorenring von K in sich durch Restklassenbildung nach dem zweiseitigen Ideal derjenigen Transformatoren, denen Divisoren aus der gröberen Hauptklasse von $\mathfrak{R}/K$ entsprechen.

Es sei noch bemerkt, daß sich die multiplikative Zusammensetzung der $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatoren}\\ \text{Multiplikatoren}\end{matrix}\right\}$ nicht durch eine bekannte Operation für die Divisoren oder auch nur die $\left\{\begin{matrix}\text{gewöhnlichen}\\ \text{gröberen}\end{matrix}\right\}$ Klassen von $\mathfrak{R}/K$ beschreiben läßt. Dementsprechend können wir also den $\left\{\begin{matrix}\text{Transformatorenring}\\ \text{Multiplikatorenring}\end{matrix}\right\}$ von K in sich nicht in Analogie zu dem obigen Hauptsatz durch einen bekannten Ring aus den $\left\{\begin{matrix}\text{gewöhnlichen}\\ \text{gröberen}\end{matrix}\right\}$ Klassen von $\mathfrak{R}/K$ isomorph beschreiben. Ein solche Beschreibung kommt vielmehr erst zustande, wenn man die durch den Beweis von Satz 10 gelieferte Zusammensetzung $\mathfrak{D}_{12}\mathfrak{D}_{23} \sim \mathfrak{D}_{13}$ als neue Klassenoperation in $\mathfrak{R}/K$ deutet.

§ 6. Korrespondenzen und Integrale erster Gattung im klassischen Fall.

1. K und K seien zwei algebraische Funktionenkörper von je einer komplexen Variablen x bzw. ξ, die als algebraisch unabhängige Unbestimmte über dem Körper k der komplexen Zahlen angesehen werden können. K ist die Gesamtheit der auf einer geschlossenen zusammenhängenden Riemannschen Fläche F im großen eindeutigen und bis auf Pole regulären Funktionen. Entsprechend gehört zu K eine Fläche Φ. Die Geschlechter von K, K seien g, γ.

Der klassische Begriff einer Korrespondenz von K zu K ist folgendermaßen erklärt: Es sei F_m eine m-blättrige Überlagerungsfläche von F, nicht notwendig zusammenhängend oder über F unverzweigt. F_m besitze eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung Δ auf eine μ-blättrige Überlagerungsfläche von Φ. Über einem Punkt $\mathfrak{p}$ von F liegen dann m Punkte $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_m^*$ von F_m (Verzweigungspunkte mit der Anzahl der in ihnen zusammenhängenden Blätter gezählt). Die Abbildung Δ ordnet jedem dieser Punkte $\mathfrak{p}_i^*$ umkehrbar eindeutig einen Punkt $\wp_i^*$ von Φ_μ zu, und jeder dieser Punkte $\mathfrak{p}_i^*$ bestimmt eindeutig seinen Spurpunkt $\wp_i$ auf Φ. Wir können $\mathfrak{p}$ als Prim-

divisor von K und die Punktgruppe $\wp_1 \dots \wp_m$ als ganzen Divisor m-ten Grades von K ansehen. Dann haben wir also eine eindeutige Funktion

$$\Delta(\mathfrak{p}) = \wp_1 \dots \wp_m$$

der Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, deren Werte ganze Divisoren von K des festen Grades m sind.

Wir zeigen, daß dieser klassische Begriff der Korrespondenz sich unserem in § 2 auf algebraischer Grundlage allgemein definierten Korrespondenzbegriff unterordnet, daß also ein Divisor $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{R}/K$ derart existiert, daß

$$\Delta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{p})$$

ist. Δ bildet nämlich jeden zusammenhängenden Teil $F^i_{m_i}$ von F umkehrbar eindeutig konform auf einen zusammenhängenden Teil $\Phi^i_{\mu_i}$ von Φ ab. Diese Abbildung Δ_i von $F^i_{m_i}$ auf $\Phi^i_{\mu_i}$ bedeutet, daß der zu $F^i_{m_i}$ gehörige endlich-algebraische Erweiterungskörper K_i^{**} von K (Grad m_i) isomorph auf den zu $\Phi^i_{\mu_i}$ gehörigen endlich-algegebraischen Erweiterungskörper K_i^{**} von K (Grad μ_i) abgebildet wird, und daß somit K selbst isomorph auf einen Teilkörper K_{i0}^* von K_i^{**} bezogen ist, der mit K das Kompositum $K_i^* = K_{i0}^* K$ innerhalb K_i^{**} habe (siehe Fig. 7). Dieser Isomorphismus definiert

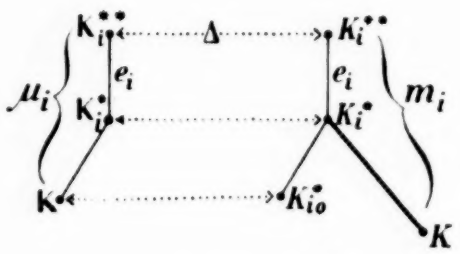

Fig. 7.

einen Primdivisor $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{R}/K$, der $\mathfrak{R}$ auf K_i^* abbildet. Ist $[K_i^{**} : K_i^*] = e_i$, so gilt nach unserer algebraischen Korrespondenzdefinition ersichtlich

$$\Delta_i(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_i(\mathfrak{p})^{e_i} = \mathfrak{P}_i^{e_i}(\mathfrak{p}),$$

also zusammengenommen

$$\Delta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{p}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \prod_i \mathfrak{P}_i^{e_i}.$$

Der sich hier einstellende Divisor $\mathfrak{D}$ ist ganz und enthält keinen konstanten Primfaktor. Die Primfaktoren $\mathfrak{P}_i$ sind nicht notwendig verschieden, denn es kann ja sein, daß unter den zusammenhängenden Teilen $F^i_{m_i}$ konform-äquivalente vorkommen. Das Auftreten der Exponenten e_i kann man dadurch vermeiden, daß man den konform-äquivalenten Überlagerungsflächen F_m und Φ_μ von vornherein eine Minimalbedingung auferlegt, die der Ersetzung der K_i^{**}, K_i^{**} in Fig. 7 durch K_i^*, K_i^* entspricht, und daß man dafür die Vielfachheiten der zusammenhängenden Teile $F^i_{m_i}$, $\Phi^i_{\mu_i}$ entsprechend ändert (mit e^i multipliziert).

Umgekehrt sieht man aus vorstehendem unmittelbar, daß jede Korrespondenz im Sinne von § 2, deren erzeugender Divisor $\mathfrak{D}$ ganz ist und keine konstanten Primfaktoren enthält, durch eine konforme Abbildung Δ der beschriebenen Art (mit Minimalbedingung) geliefert wird.

Die Beschränkung auf ganze $\mathfrak{D}$ ohne konstante Primfaktoren kann man schließlich durch auf der Hand liegende formale Erweiterungen der analytischen Korrespondenzdefinition beseitigen.

Wir stellen im folgenden wieder unseren algebraischen Korrespondenzbegriff an die Spitze und sehen den entwickelten Zusammenhang als eine analytische Beschreibung der Wirkung einer Korrespondenz im klassischen Fall an. Dann ergeben sich aus Vorstehendem, wie wir wohl nicht im einzelnen auszuführen brauchen, analytische Beweise für die Korrespondenzsätze 5, $\bar{5}$, 6, $\bar{6}$ aus § 2 im klassischen Fall; diese Sätze betreffen ja die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen dem einer Korrespondenz zugrundeliegenden Divisor $\mathfrak{D}$ und ihrer Wirkung auf die Divisoren von K, die hier durch die konforme Abbildung Δ beschrieben wird.

2. Die weiteren Korrespondenzsätze 4 und 7, $\bar{7}$, 8, $\bar{8}$ aus § 2 betreffen die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen dem Divisor $\mathfrak{D}$ und der Wirkung auf die Divisorenklassen von K. Um auch diese Sätze im klassischen Fall analytisch zu erfassen, betrachten wir die Wirkung einer Korrespondenz auf die Integrale erster Gattung.

$d\mathfrak{w}$ sei eine Basis der Differentiale erster Gattung von K, als g-gliedrige Spalte verstanden. Mit irgendeinem festen Punkt $\mathfrak{p}_\infty$ von F bilden wir dann die Basis

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{p}) = \int_{\mathfrak{p}_\infty}^{\mathfrak{p}} d\mathfrak{w}$$

der Integrale erster Gattung von K. Der Integrationsweg soll dabei für alle g Glieder der Spalte derselbe sein. Allgemeiner setzen wir in üblicher Weise

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{a}) = \sum_i r_i \mathfrak{u}(\mathfrak{p}_i) \quad \text{für} \quad \mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{p}_i^{r_i}.$$

$\mathfrak{u}(\mathfrak{a})$ ist bei freibleibenden Integrationswegen nur bis auf eine willkürliche Periodenspalte von $\mathfrak{u}$ bestimmt. Bezeichnet A die g-zeilige und $2g$-spaltige Periodenmatrix von $\mathfrak{u}$ in bezug auf ein festes vollständiges Schnittsystem (Homologiebasis der 1-dimensionalen Zyklen) von F, so ist die allgemeine Periodenspalte von $\mathfrak{u}$ durch $A\mathfrak{g}$ mit einer ganzzahligen $2g$-gliedrigen Spalte $\mathfrak{g}$ gegeben. Für eine Beziehung

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{a}) + A\mathfrak{g}$$

schreiben wir kurz

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{b}) \equiv \mathfrak{u}(\mathfrak{a}) \mod. A.$$

(Rechtsseitige Matrizenkongruenz.)

Für Divisoren nullten Grades $\mathfrak{a}_0$ von K hängt $\mathfrak{u}(\mathfrak{a}_0)$ nicht von der Wahl des Anfangspunktes $\mathfrak{p}_\infty$ der Integration ab. Es gelten die beiden Sätze:

Abelsches Theorem. $\mathfrak{a}_0$ ist genau dann ein Hauptdivisor, wenn $\mathfrak{u}(\mathfrak{a}_0) \equiv 0 \mod. A$ ist.

Jacobisches Theorem. Zu jeder g-gliedrigen Spalte $\mathfrak{s}$ aus komplexen Zahlen gibt es mindestens einen Divisor nullten Grades $\mathfrak{a}_0$ von K mit $\mathfrak{u}(\mathfrak{a}_0) \equiv \mathfrak{s} \mod. A$.

Sie können zusammengefaßt werden in den Satz:

$\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{u}(\mathfrak{a}_0)$ ist eine *isomorphe* Abbildung der Klassengruppe nullten Grades von K auf die *volle* Additionsgruppe der g-gliedrigen Spalten mod. A.

Für K verwenden wir entsprechend die Bezeichnungen $d\boldsymbol{w}$, $\mathfrak{P}_\infty$, $\boldsymbol{u}(\mathfrak{P})$, A.

Durchläuft $\mathfrak{p}$ in einer Korrespondenz

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) = \prod_\nu \mathfrak{P}_\nu^{r_\nu}$$

einen geschlossenen Weg auf F, so erfährt jede einem Primfaktor $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{D}$ entsprechende Punktgruppe $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_1^{(i)} \dots \mathfrak{P}_{m_i}^{(i)}$ nur eine Vertauschung ihrer Punkte, $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ kehrt also in sich zurück. Nimmt man die Konformität der Abbildungen Δ_i hinzu, so ergibt sich, daß die mittels der Integrale erster Gattung von K gebildete Spalte

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{p})) \equiv \sum_{\nu} r_\nu \boldsymbol{u}(\mathfrak{P}_\nu) \text{ mod. A}$$

aus Funktionen der Punkte $\mathfrak{p}$ von F bis auf Periodenspalten von $\boldsymbol{u}$ eindeutig und überall regulär ist, also aus Integralen erster Gattung von K besteht. Demnach besteht eine Darstellung

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{p})) \equiv \mathsf{M}\mathfrak{u}(\mathfrak{p}) + \mathfrak{t} \text{ mod. A} \tag{1}$$

mit einer konstanten Matrix M von γ Zeilen und g Spalten und einer konstanten γ-gliedrigen Spalte t.

Da $\mathfrak{u}(\mathfrak{p})$ selbst sich bei geschlossenen Umläufen auf F genau um die einzelnen Spalten der Periodenmatrix A ändert, folgt zudem für M eine Beziehung

$$\mathsf{M}A = \mathsf{A}G \tag{2}$$

mit einer ganzzahligen Matrix G von 2γ Zeilen und $2g$ Spalten.

Die Korrespondenz liefert so eine *lineare Transformation* (1) der Integrale erster Gattung von K in die von K, die sich aus der *Multiplikation* mit M und der *Translation* um t zusammensetzt, und dabei liefert M eine *Multiplikation* (2) *von A in* A.

t hängt noch von der Wahl der Anfangspunkte $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{P}_\infty$ der Integrationen ab. M ist von $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{P}_\infty$ unabhängig und hat ein ohne weiteres ersichtliches Transformationsverhalten bei Transformation der Differentialbasen $d\mathfrak{w}$ und $d\boldsymbol{w}$.

Ist K mit K isomorph, handelt es sich also um eine Korrespondenz von K zu sich selbst, so kann man $dw = d\mathfrak{w}$, $\mathfrak{P}_\infty = \mathfrak{p}_\infty$, $u(\mathfrak{P}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{p})$, $A = \mathsf{A}$ wählen, und (2) wird zu

$$\mathsf{M}A = AG.$$

M liefert dann also eine *Multiplikation von A in sich.* („Komplexe Multiplikation".)

Die lineare Transformation (1) ergibt für zusammengesetzte Divisoren $\mathfrak{a}$ vom Grade f allgemeiner

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{a})) \equiv \mathsf{M}\mathfrak{u}(\mathfrak{a}) + f\mathfrak{t} \text{ mod. A}, \tag{3}$$

insbesondere also für Divisoren nullten Grades $\mathfrak{a}_0$ die reine Multiplikation

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_0)) \equiv \mathsf{M}\mathfrak{u}(\mathfrak{a}_0) \text{ mod. A}. \tag{3_0}$$

Aus (3_0) und (2) folgt nach dem Abelschen Theorem unmittelbar, daß für einen Hauptdivisor $\mathfrak{a}_0$ auch $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_0)$ ein Hauptdivisor ist, also der Homomorphiesatz (Satz 4) aus § 2.

Ferner ergeben sich mittels des Abelschen und Jacobischen Theorems die beiden folgenden Tatsachen:

Der durch eine Korrespondenz gelieferte Homomorphismus der

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{vollen Klassengruppe}\\ \textit{Klassengruppe nullten Grades}\end{array}\right\} \textit{ von } K \textit{ in die von } \mathsf{K} \textit{ und die durch sie gelieferte}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{lineare Transformation } (\mathsf{M}, \mathfrak{t})\\ \textit{Multiplikation } \mathsf{M}\end{array}\right\} \textit{ bestimmen sich gegenseitig eindeutig.}$$

Ist nämlich

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{a}) \sim 1 \text{ für alle } \mathfrak{a},$$

so folgt

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{a})) \equiv 0 \text{ mod. A für alle } \mathfrak{a},$$

also nach (3), (3_0)

$$\mathsf{Mu}(\mathfrak{a}) + ft \equiv 0 \mod \mathsf{A} \text{ für alle } \mathfrak{a},$$
$$\mathsf{Mu}(\mathfrak{a}_0) \equiv 0 \mod \mathsf{A} \text{ für alle } \mathfrak{a}_0.$$

Da in der letzteren Kongruenz $u(\mathfrak{a}_0)$ alle g-gliedrigen Spalten aus komplexen Zahlen durchläuft, folgt aus ihr ersichtlich $\mathsf{M} = 0$, und dann aus der ersteren Kongruenz auch $t = 0$. Daß diese Schlüsse auch in umgekehrter Richtung gelten, sieht man unmittelbar.

Weiß man nur $\mathfrak{D}(\mathfrak{a}_0) \sim 1$ für alle $\mathfrak{a}_0$, so folgt nur $\mathsf{M} = 0$, und umgekehrt.

Das ergibt die ausgesprochenen Tatsachen, wenn man noch hinzunimmt, daß der Multiplikation und Division der $\mathfrak{D}$ ersichtlich die Addition und Subtraktion der linearen Transformationen (3), (3_0) entspricht.

Damit sind zwar nicht die Korrespondenzsätze 7, $\bar{7}$, 8, $\bar{8}$ aus § 2 selbst für den klassischen Fall analytisch bewiesen, wohl aber ihnen entsprechende Tatsachen hergeleitet. Der Vergleich mit jenen rein algebraischen Tatsachen ergibt unter Verwendung der in § 5 eingeführten Begriffsbildungen die folgenden Tatsachen:

Der Transformatorenmodul von K in K *ist isomorph zum Modul der linearen Transformationen* (M, t).

Der Multiplikatorenmodul von K in K *ist isomorph zum Modul der Multiplikationen* M *von A in* A.

3. Um schließlich auch die durch Satz 10 in § 4 eingeführte Zusammensetzung der Korrespondenzen einzubeziehen, stellen wir der Substitution (3) für die Funktion $u(\mathfrak{a})$ noch die entsprechende Substitution für den Grad $f(\mathfrak{a})$ zur Seite, betrachten also das System

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{a})) \equiv \mathsf{Mu}(\mathfrak{a}) + \mathsf{t}f(\mathfrak{a}) \mod \mathsf{A} \\ f(\mathfrak{D}(\mathfrak{a})) = mf(\mathfrak{a}) \end{array}\right\},$$

wo m den Grad von $\mathfrak{D}$ bedeutet. An Stelle der linearen Transformation (1) mit der Matrix (M, t) ordnen wir demgemäß $\mathfrak{D}$ die aufgefüllte lineare Transformation (4) mit der Matrix $\begin{pmatrix} \mathsf{M} & \mathsf{t} \\ 0 & m \end{pmatrix}$ zu, die sich bei Beschränkung auf $\mathfrak{a}_0$ statt $\mathfrak{a}$ wesentlich auf (3_0) mit der Matrix M reduziert. Dann entspricht der Zusammensetzung der Korrespondenzen die Zusammensetzung der linearen Transformationen (4), also die Multiplikation der Matrizen $\begin{pmatrix} \mathsf{M} & \mathsf{t} \\ 0 & m \end{pmatrix}$. Unter Verwendung der in § 5 eingeführten Begriffsbildungen erhalten wir also:

Der Transformatorenring von K in sich ist isomorph zum Ring der linearen Transformationen $\begin{pmatrix} \mathsf{M} & \mathsf{t} \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

Der Multiplikatorenring von K in sich ist isomorph zum Ring der Multiplikationen M *von A in sich.*

Die letztere Tatsache ist als die wichtigste Erkenntnis dieses Paragraphen anzusehen. Hiernach ist der in § 5 definierte Multiplikatorenring eines algebraischen Funktionenkörpers K in sich der bei beliebigem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k brauchbare rein-algebraische Ersatz für den Ring der komplexen Multiplikationen in sich der Periodenmatrix der Integrale erster Gattung von K im klassischen Fall.

Wir haben zudem gefunden, daß im klassischen Fall der in § 5 definierte Multiplikatorenring von K in sich eine treue Darstellung durch g-reihige quadratische Matrizen hat.

4. Diese Tatsachen erhalten ihr volles Gewicht erst durch die Feststellung daß die Beziehung (2) die einzige Bedingung für die Multiplikationen M ist, d. h. daß es zu jeder komplexzahligen Matrix M, für die (2) mit einer passenden ganzzahligen Matrix G gilt, insbesondere also zu jeder Multiplikation in sich der Periodenmatrix A im Falle $K = \mathsf{K}$, eine Korrespondenz $\mathfrak{D}$ gibt, zu der gemäß (1) gerade die Multiplikation M gehört. Die Translation t in (1) kann dabei noch beliebig vorgegeben werden.

Der Beweis dieser Tatsache ist von Hurwitz [6]) angedeutet worden. Es soll hier kurz gezeigt werden, wie dieser Beweis streng gestaltet werden kann.

Zunächst genügt es, die Behauptung mit einem bestimmten t in (1) zu beweisen. Denn gilt (1) mit t, und ist t′ vorgegeben, so bestimme man nach dem Jacobischen Theorem einen ganzen Divisor γ-ten Grades $\boldsymbol{g}$ von K mit

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}) \equiv \mathsf{t}' - \mathsf{t} \bmod \mathsf{A}.$$

Ist dann $\mathfrak{G}$ der zu $\boldsymbol{g}$ gehörige konstante Divisor von $\mathfrak{K}/K$, so ist für $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$ ersichtlich

$$\boldsymbol{u}(\mathfrak{D}'(\mathfrak{p})) \equiv \boldsymbol{u}(\mathfrak{D}(\mathfrak{p})) + \mathsf{t}' - \mathsf{t} \equiv \mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t}' \bmod \mathsf{A}.$$

Es ist nun möglich, t so auszuwählen, daß für jedes $\mathfrak{p}$ *genau ein* ganzer Divisor γ-ten Grades $\Delta(\mathfrak{p})$ mit

$$\boldsymbol{u}(\Delta(\mathfrak{p})) \equiv \mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t} \bmod \mathsf{A} \tag{4}$$

vorhanden ist.

Dies zeigen wir so: Im Raum R der γ-gliedrigen Spalten mod. A bildet die Gesamtheit derjenigen Punkte $\mathfrak{s}$, für die $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}) \equiv \mathfrak{s}$ mod. A durch mehr als einen ganzen Divisor γ-ten Grades $\boldsymbol{g}$ lösbar ist, eine analytische Teilmannigfaltigkeit der (komplexen) Dimension $\gamma - 2$, während R selbst die Dimension γ hat [7]). Nun durchläuft $\mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t}$ mod. A, wenn $\mathfrak{p}$ die Fläche F durchläuft, eine eindimensionale, wegen der vorausgesetzten Bedingung (2) analytische Teilmannigfaltigkeit M_1 von R. Man kann dann in der Tat t so wählen, daß sich M_1 und $M_{\gamma-2}$ nicht schneiden.

Es ist jetzt zu zeigen, daß die so eindeutig definierte Funktion $\Delta(\mathfrak{p})$ der Punkte $\mathfrak{p}$ von F, deren Werte γ-gliedrige Punktgruppen von Φ sind, analytisch ist, d. h. daß $\Delta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_\gamma$ in der Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}_0$ mit $\Delta(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{P}_{01} \ldots \mathfrak{P}_{0\gamma}$ dadurch gegeben ist, daß die symmetrischen Funktionen der Ortsuniformisierenden zu den $\mathfrak{P}_{0i}$ regulär-analytische Funktionselemente einer Ortsuniformisierenden zu $\mathfrak{p}_0$ sind. Denn dann folgt weiter, daß $\Delta(\mathfrak{p})$ eine Überlagerungsfläche F_γ von F eindeutig analytisch auf Φ und somit umkehrbar eindeutig konform auf eine Überlagerungsfläche Φ_μ von Φ abbildet, was nach den Ausführungen zu Beginn dieses Paragraphen den Beweis vollendet.

Um die Analytizität von $\Delta(\mathfrak{p})$ einwandfrei zu begründen, wählt man am besten t auch noch so, daß M_1 mit der $(\gamma - 1)$-dimensionalen analytischen Teilmannigfaltigkeit $M_{\gamma-1}$ derjenigen $\mathfrak{s}$, für die $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}) \equiv \mathfrak{s}$ mod. A durch einen ganzen Divisor γ-ten Grades $\boldsymbol{g}$ mit nicht durchweg verschiedenen Primfaktoren lösbar ist, höchstens endlich viele Schnittpunkte hat [8]). In der R-Umgebung eines Punktes $\mathfrak{s}$, der weder auf $M_{\gamma-2}$ noch

---

[6]) A. Hurwitz, Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip, Math. Ann. **28** (1887) = Math. Werke I, 163—188.

[7]) Siehe etwa H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 131 f. Überhaupt sei für die analytische Theorie der Korrespondenzen auf das Weylsche Buch verwiesen, insbesondere § 17.

[8]) Der Beweis, daß man $\mathfrak{s}$ wirklich so wählen kann, daß M_1 von $M_{\gamma-2}$ überhaupt nicht und von $M_{\gamma-1}$ höchstens in endlich vielen Punkten getroffen wird, kann, da R geschlossen ist, leicht mit Hilfe der Ergebnisse von Blumenthal, Zum Eliminationsproblem,' Math. Ann. **57** (1903), streng erbracht werden.

auf $M_{\gamma-1}$ liegt, ist $\boldsymbol{u}(\wp_1 \ldots \wp_\gamma) \equiv \mathfrak{z} \bmod. \mathsf{A}$ durch von $\mathfrak{z}$ regulär-analytisch abhängige $\wp_i$ eindeutig lösbar[9]). Daher ist $\Delta(\mathfrak{p})$ in der Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}$, für den $\mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t} \bmod. \mathsf{A}$ nicht auf $M_{\gamma-2}$ liegt, aus regulär-analytischen Funktionselementen zusammengesetzt. Von dem trivialen Fall abgesehen, daß $\mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t} \bmod. \mathsf{A}$ sich auf einen Punkt reduziert, gibt es aber nur endlich viele $\mathfrak{p}$, für die $\mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t} \bmod. \mathsf{A}$ auf $M_{\gamma-1}$ liegt. Denn sonst gäbe es unendlich viele $\mathfrak{p}$, für die $\mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t} \bmod. \mathsf{A}$ einer der endlich vielen Schnittpunkte von $M_{\gamma-1}$ mit M_1 ist. Da sich diese unendlich vielen $\mathfrak{p}$ auf F häufen, so wäre $\mathsf{Mu}(\mathfrak{p}) + \mathsf{t}$ konstant, was wir ausschlossen. Die endlich vielen Ausnahmepunkte $\mathfrak{p}_0$ müssen ebenfalls entweder reguläre oder Verzweigungsstellen der Funktion $\Delta(\mathfrak{p})$ sein; es kann sich nicht um wesentliche Singularitäten handeln, weil $\Delta(\mathfrak{p})$ bei Annäherung von $\mathfrak{p}$ an einen solchen Ausnahmepunkt $\mathfrak{p}_0$ nach (4) gegen die eindeutig bestimmte Punktgruppe $\Delta(\mathfrak{p}_0)$ strebt.

[9]) H. Weyl, l. c. [2]).

Eingegangen 28. Oktober 1936.

Ein großer wissenschaftlicher Preis.

Ingenieur N. Malaxa aus Bukarest hat einen periodischen Preis für Mathematik und Physik im Betrage von 500.000 Lei gestiftet. Dieser Preis wird durch eine internationale Kommission verliehen werden, die ihren Sitz im „Institut N. Malaxa“ der Naturwissenschaftlichen Fakultät in Bukarest hat.

Zum ersten Male soll dieser Preis einem jungen Gelehrten zuerkannt werden, der in der Zeit vom 1. Januar 1934 bis 1. Januar 1938 einen nach Ansicht der Kommission sehr wichtigen Beitrag zum Problem der Lösung von Gleichungen (Differential-, Integral- oder Funktionalgleichungen) liefert.

Die feierliche Preisverleihung wird in Bukarest Anfang Juni 1938 in Gegenwart der höchsten rumänischen Behörden, des Preis-Ausschusses und der Mitglieder des „Instituts N. Malaxa“ erfolgen.